GEOGRAFICKÝ ČASOPIS

56 2004 1

*Jozef Krcho, Alexandra Benová**

GEORELIÉF A JEHO GEOMETRICKÁ ŠTRUKTÚRA: MODELOVANIE GEORELIÉFU S PARAMETROM A BEZ PARAMETRA ČASU

J. Krcho, A. Benová: Georelief and its geometrical structure: georelief modelling with and without time parameter. Geografický časopis, 56, 2004, 1, 7 figs., 19 refs.

The paper summarizes part of the results of morphometric georelief analysis with view of geometric relief form classification, which were achieved by J. Krcho and published progressively in this journal. In addition, mathematical relationships for the set of morphometric quantities, as well as classification of geometrical georelief forms and their inner structure are expressed.

Key words: altitude gradient, normal curvature, horizontal curvature, normal geometric forms, horizontal geometric forms, total geometric forms, convexity, concavity, Dupin indicatrix

ÚVOD

Práca je venovaná 60. výročiu založenia Geografického ústavu SAV. Rozvoj exaktnej matematicko-fyzikálne chápanej geomorfometrie a modelovania georeliéfu pomocou komplexného digitálneho modelu (KDMR), ako aj formulácia samotného KDMR, je totiž nie len na Slovensku, ale aj v bývalom Československu úzko spojený s *Geografickým časopisom* Geografického ústavu SAV. V ňom bola od roku 1964 až doteraz publikovaná podstatná časť prác z tejto oblasti (napr. Krcho 1964, 1967, 1968, 1979, 1983, 1986, 1987 a 1999). Preto napísanie tejto práce bolo nielen povinnosťou, ale aj cťou.

* Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského, Mlynská dolina 1, 842 15 Bratislava

NÁČRT PROBLÉMU

Práca má profilový charakter. Nadväzuje na výsledky doteraz publikovaných prác a súčasne prezentuje prínosy v oblasti klasifikácie geometrických foriem georeliéfu, z ktorých časť je graficky dokumentovaná z povodia Vápeničného potoka v Malých Karpatoch. Načrtávame teda v nej problém exaktnej, matematicko-fyzikálne chápanej klasifikácie celkových geometrických foriem georeliéfu. Klasifikácia je založená na množine morfometrických veličín $\mathbf{G}_{RF}$, odvodených v prácach Krcha (1964, 1973,1984, 1986, 1987 a 1990) aparátom diferenciálnej geometrie. Georeliéf bol v nich uvažovaný vzhľadom na gravitačné pole Zeme, takže vrstevnice a spádové krivky, tvoriace na ňom ortogonálnu sieť kriviek, ako aj množina takto odvodených morfometrických veličín $\mathbf{G}_{RF}$, majú tak spolu zároveň aj matematicko-fyzikálny význam. Takto odvodená množina $\mathbf{G}_{RF}$ potom umožňuje celkové geometrické formy analyzovať a klasifikovať vo vzťahu k prebiehajúcim procesom na georeliéfe, pretože vývoj (genéza) foriem georeliéfu je výsledkom týchto procesov. Všetky formy na georeliéfe majú teda z hľadiska procesov jednak svoju genézu, jednak svoju geometriu.

Keďže georeliéf je dynamický systém, ktorý študujeme v určitej mierke 1:M_i a jej rozlišovacej úrovni U_i, celkový problém sme rozdelili do nasledujúcich, na seba nadväzujúcich okruhov. Sú to:

– stručná vstupná formulácia dynamického modelu georeliéfu a formulácia korektných kritérií na jeho nahradenie statickým modelom georeliéfu v mierke 1:M_i a jej rozlišovacej úrovni U_i bez parametra času T, ako aj stanovenie podmienok pre dĺžku jeho časovej platnosti,

– vyjadrenie morfometrických veličín georeliéfu tvoriacich množinu $\mathbf{G}_{RF}$, ich vnútorná klasifikácia, ako aj rozklad množiny $\mathbf{G}_{RF}$ na podmnožiny ${}^{(i)}\mathbf{G}_{RF}$ (i = 1, 2, 3), uvažovaný z hľadiska rádu parciálnych derivácií obsiahnutých v matematických vzťahoch jednotlivých morfometrických veličín,

– vyjadrenie celkových geometrických foriem georeliéfu, ich klasifikácia a rozbor ich vnútornej štruktúry.

DYNAMICKÝ MODEL GEORELIÉFU A JEHO NAHRADENIE STATICKÝM MODELOM – PODMIENKY NAHRADENIA A DĹŽKA ČASOVEJ PLATNOSTI

Georeliéf je osobitnou súčasťou geografickej sféry, v ktorej má zvláštne postavenie. V prácach Krcha (1986, 1987 a 1990) bol definovaný ako dynamický subsystém geografickej sféry chápanej ako celoplanetárny priestorovo organizovaný geosystém $\mathbf{S}_G$ = ($\mathbf{G}_G$, $\mathbf{R}_G$). Vyjadrený bol v tvare usporiadanej dvojice $\mathbf{S}_{RF}$ = ($\mathbf{G}_{RF}$, $\mathbf{R}_{RF}$), kde $\mathbf{G}_{RF}$ je množina prvkov, ktorými sú dynamické morfometrické veličiny, $\mathbf{R}_{RF}$ je množina relácií jednak vo vnútri množiny $\mathbf{G}_{RF}$ navzájom medzi morfometrickými veličinami a jednak medzi morfometrickými veličinami a ostatnými subsystémami systému $\mathbf{S}_G$.

V priestore geografickej sféry, uvažovanom vzhľadom na referenčnú plochu Zeme v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda, h\rangle$ je georeliéf určený množinou bodov $\mathbf{F}_{RF} = \{A^*_i(\varphi_i, \lambda_i, h_i)\}_{i\in \boldsymbol{I}}$, ktorá na zemskom povrchu vytvára dynamickú plochu; veličiny O, φ, λ, h, i, $\boldsymbol{I}$ majú nasledujúci význam: $O \equiv S$ je začiatok súradnicovej sústavy, S stred Zeme, φ geografická šírka, λ geografická dĺžka, h nadmorská výška bodov $A^*_i(\varphi_i, \lambda_i, h_i) \in \boldsymbol{F}_{RF}$ uvažovaná v smere normál N_i k referenčnej guľovej ploche Zeme, $\boldsymbol{I}$ indexová množina, pričom i je vhodne volený identifikačný znak pre usporiadanú trojicu φ_i, λ_i, h_i.

Táto plocha s jej geometrickými formami je na jednej strane výslednicou procesov prebiehajúcich v geografickej sfére, na druhej strane však tieto procesy spätne ovplyvňuje a vplýva tak na priestorovú diferenciáciu jednotlivých zložiek krajiny ako aj na krajinu ako celok vnímaný ako priestorovo organizovaný geosystém. V literatúre je táto plocha pomenovaná tiež ako topografická plocha georeliéfu.

Georeliéf ako dynamická plocha – stručný náčrt dynamického modelu georeliéfu

Ako dynamická plocha je georeliéf aj svojou geometriou nehmotnou veličinou; hmotný je iba nositeľ tejto plochy, ktorým sú povrchové vrstvy litosféry a pedosféra. V procesoch prebiehajúcich v geografickej sfére tvary tejto plochy závisia od vlastností svojho materiálneho nositeľa.

Úplná definícia takto chápaného georeliéfu bola vyjadrená v prácach Krcha (1986 a 1990). Z hľadiska cieľa tejto práce uvádzame jej zostručnenú verziu, ktorá však vyjadruje iba základné okruhy problému.

Zostručnená definícia georeliéfu: Georeliéf je na určitej rozlišovacej úrovni pevné, ale pritom dynamické rozhranie medzi litosférou, resp. pedosférou na jednej strane a atmosférou, resp. hydrosférou na druhej strane, ktoré má z hľadiska jeho priebehu v priestore geografickej sféry, vnímanom vo zvolenej súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda, h\rangle$, vlastnosti plochy a ktoré teda považujeme za plochu tvorenú množinou bodov $\mathbf{F}_{RF} = \{A^*_i(\varphi_i, \lambda_i, h_i)\}_{i\in \boldsymbol{I}}$ na množine normál $\{N_i\}_{i\in \boldsymbol{I}}$ k referenčnej guľovej ploche v intervale $\langle H_D, H_H\rangle$, kde H_D je dolná hranica a H_H horná hranica geografickej sféry.

Poznámka 1. Reálny geometrický priestor geografickej sféry bol vzhľadom na referenčnú guľovú plochu Zeme vymedzený a presne definovaný v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda, h\rangle$ v práci Krcha (1990). V spojitom tvare bol na základe množín

$$\mathbf{F} = \{A_i(\varphi_i, \lambda_i)\}_{i\in \mathbf{I}}$$

a

$$\mathbf{M}_i = \{A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i, h_{is})\}_{s\in \mathbf{S}}$$

vyjadrený množinou bodov

$$\mathbf{F}_G = \{\mathbf{M}_i\}_{i\in \mathbf{I}} = \{\{A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i, h_{is})\}_{s\in \mathbf{S}}\}_{i\in \mathbf{I}}$$

a v diskrétnom tvare množinou

$${}_D\mathbf{F}_G = \left[\left[A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i, h_{is})\right]_{s=1}^{m}\right]_{i=1}^{n}$$

Pritom $\mathbf{F}_G$ je množina bodov tvoriacich referenčnú guľovú plochu, kde $\mathbf{I}$ je indexová množina, i je vhodne volený identifikačný znak pre usporiadanú dvojicu (φ_i, λ_i) a $\mathbf{M}_i$ je množina bodov uvažovaná v intervale $\langle H_D, H_H\rangle$ na normále N_i, vedenej k referenčnej ploche v každom jej bode $A_i(\varphi_i, \lambda_i) \in \mathbf{F}$, kde $\mathbf{S}$ je indexová množina a s je vhodne volený identifikačný znak pre hodnotu h na normále N_i. Veličina h_{is} vyjadruje teda na každej normále N_i (i = 1, 2, ...) prechádzajúcej bodom $A_i(\varphi_i, \lambda_i) \in \mathbf{F}$ referenčnej plochy Zeme polohu bodu

$$A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i, h_{is}) \in \mathbf{M}_i$$

v intervale $\langle H_D, H_H \rangle$, pričom $(h_{is})_{\min} = H_D$ a $(h_{is})_{\max} = H_H$. V karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z \rangle$ je definovaný jeho abstraktný kartografický 2D a 3D zobrazovací priestor, ako aj úplná operácia zobrazenia $\mathbf{F}_G :\rightarrow \mathbf{E}_G \wedge \mathbf{E}_G :\rightarrow \mathbf{F}_G$. Abstraktný kartografický 2D a 3D zobrazovací priestor bol v spojitom tvare vyjadrený množinou

$$\mathbf{E}_G = \left\{ \left\{ A^*_{is}(x_i, y_i, z_{is}) \right\}_{s \in \mathbf{S}} \right\}_{i \in \mathbf{I}}$$

a v diskrétnom tvare množinou

$${}_D\mathbf{E}_G = \left[\left[A^*_{is}(x_i, y_i, z_{is}) \right]_{s=1}^{m} \right]_{i=1}^{n}.$$

Množine bodov $\mathbf{F}_{RF} = \{A^*_i(\varphi_i, \lambda_i, h_i)\}_{i \in \mathbf{I}}$ georeliéfu z reálneho priestoru geografickej sféry je tak v kartografickom zobrazovacom priestore priradená množina bodov $\mathbf{E}_{RF} = \{A^*_i(x_i, y_i, z_i)\}_{i \in \mathbf{I}}$ ako jej obraz. V tejto práci nastolený problém výsledne vyjadrujeme v súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z \rangle$. *Koniec poznámky 1.*

V prácach Krcha (1986, 1990, 1992 a 1995) bol dynamický model georeliéfu ako osobitný subsystém $\mathbf{S}_{RF}$ geografickej sféry vyjadrený v kartografickom 2D a 3D zobrazovacom priestore systémom rovníc

$$\begin{aligned} & z = f_{RF,E}(Z_1, Z_2, ..., Z_n) \\ & Z_1 = \Psi_1(Z_2, Z_3, ..., Z_n) \qquad Z_i = g_i(x, y, z, T) \\ & Z_2 = \Psi_2(Z_1, Z_3, ..., Z_n) \qquad i = 1, 2, ..., n \\ & \ldots\ldots \\ & Z_n = \Psi_n(Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}), \end{aligned} \tag{1}$$

kde $Z_i \in \mathbf{P}_G$ sú premenné, navzájom na sebe závislé stavové veličiny, charakterizujúce v každom časovom momente T stavy jednotlivých základných geosfér (atmosféry, hydrosféry, litosféry, pedosféry a biosféry) geografickej sféry, ktoré sú v interakcii. Tvorené sú kvantitatívnymi fyzikálnymi, fyzikálnochemickými, chemickými, matematickoštatistickými veličinami. Veličiny Z_i tvoria parametrickú bázu (abstraktnú abecedu) geografickej sféry ako priestorovo organizovaného geosystému $\mathbf{S}_G(P, T)$. Prvý diferenciál dz výšky $z = f_{RF,E}(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ bol zo sústavy rovníc (1) výsledne vyjadrený v tvare

$$dz = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz + F_T\,dT, \tag{2}$$

kde

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{RF,E}}{\partial Z_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z_j} \frac{\partial g_j}{\partial x}\;; \qquad F_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{RF,E}}{\partial Z_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z_j} \frac{\partial g_j}{\partial y} \tag{3}$$

$$F_z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{RF,E}}{\partial Z_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z_j} \frac{\partial g_j}{\partial z}\;; \qquad F_T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{RF,E}}{\partial Z_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z_j} \frac{\partial g_j}{\partial T},$$

kde i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n, pričom $j \neq i$ a druhý diferenciál d^2z bol vyjadrený v tvare

$$\begin{aligned} d^2z = {} & F_{xx}dx^2 + F_{yy}dy^2 + F_{zz}dz^2 + F_{TT}\,dT^2 + 2\,F_{xy}dxdy + 2\,F_{xz}dxdz + \\ & + 2\,F_{xT}dxdT + 2\,F_{yz}dydz + 2F_{yT}dydT + 2F_{zT}dzdT \end{aligned} \tag{4}$$

Parciálne derivácie v (2), (3) a (4) sú dynamickými veličinami, ktoré sa menia v závislosti na premenných veličinách $Z_i \in \mathbf{P}_G$, na polohe x, y, z, a teda sú takisto dynamickými veličinami aj morfometrické veličiny georeliéfu. Sú v nich obsiahnuté informácie o vzájomných závislostiach stavových veličín Z_i, o závislostiach Z_i na horizontálnej polohe x, y, na vertikálnej polohe z a na čase T. Sú základom na vyjadrenie geometrickej štruktúry georeliéfu ako dynamickej plochy v závislosti od prebiehajúcich procesov a ich genézy v priebehu času T.

Nahradenie dynamického modelu georeliéfu jeho statickým modelom mierke 1:M$_i$ a jej rozlišovacej úrovni U$_i$; časový úsek ΔT_{Mi} platnosti statického modelu

Georeliéf ako dynamickú plochu vyjadrenú sústavou rovníc (1) študujeme v určitej mierke 1:M$_i$ a jej odpovedajúcej rozlišovacej úrovni U$_i$ (i = 1, 2, ...), kde medzi mierkou 1:M$_i$ a U$_i$ (i = 1, 2, ...) existuje vysoký stupeň závislosti. Rozlišovacia úroveň U$_i$, odpovedajúca mierke 1:M$_i$, je priamo úmerná tejto mierke, kde M$_i$ je mierkové číslo udávajúce veľkosť mierky 1:M$_i$. Pre mierkové číslo M$_i$ a mierku 1: M$_i$ pritom platí, že pre

$$M_1 < M_2 < ... < M_i \text{ je } (1{:}\,M_1) > (1{:}\,M_2) > ... > (1{:}\,M_i)$$

a pre rozlišovaciu úroveň U$_i$, vzhľadom na mierku 1: M$_i$ platí, že

$$U_1 > U_2 > ... > U_i.$$

Uvažujme teda vzhľadom na mierku 1:M$_i$ a jej rozlišovaciu úroveň U$_i$ o časovom intervale ΔT_{Mi}, ktorý z hľadiska kartografickej vyjadriteľnosti priestorových zmien výšok z o hodnoty Δz charakterizuje dĺžku platnosti mierky 1: M$_i$.

Pokiaľ sú teda v množine bodov $\mathbf{E}_{RF} = \{A^*_i(x_i, y_i, z_i)\}_{i \in \mathbf{I}}$ georeliéfu vo zvolenej mierke 1:M$_i$ (i = 1, 2, ...) priestorové zmeny výšok z o hodnotu Δz v priebehu časového intervalu

$$\Delta T_{Mi} = (T_{Mi(\text{konc})} - T_{Mi(\text{poč})})$$

zodpovedajúceho mierke 1:M$_i$ iba tak veľké, že sú pod jej rozlišovaciu úroveň U$_i$, nemá význam o nich uvažovať, pretože ich v danej mierke nemožno vyjadriť. $T_{Mi(\text{poč})}$ tu vyjadruje zvolený počiatočný časový moment v intervale ΔT_{Mi}, od ktorého počnúc začíname v mierke 1:M$_i$ zmenu výšok z_i o hodnotu Δz sledovať a $T_{Mi(\text{konc})}$ vyjadruje koncový časový moment v intervale ΔT_{Mi}, v ktorom zmena Δz_{Mi} je už tak veľká, že v mierke 1:M$_i$ začína byť rozlíšiteľná.

Časový interval ΔT_{Mi} je teda časový úsek odpovedajúci mierke 1:M$_i$ a jej U$_i$, za ktorý sa v danej mierke 1:M$_i$ priestorová zmena výšok $z_{Mi(\text{poč})}$ o hodnotu Δz_{Mi} dostane na jej rozlišovaciu úroveň U$_i$. Dĺžka časového intervalu ΔT_{Mi} je pritom nepriamo úmerná mierke 1: M$_i$, a teda aj jej rozlišovacej úrovni U$_i$, takže pre mierky

(1: M$_1$) > (1: M$_2$) > ... > (1: M$_i$) platí, že

$\Delta T_{M1} < \Delta T_{M2} < ... < \Delta T_{Mi}$.

Dĺžkou tohoto časového intervalu ΔT_{Mi} je zároveň v zvolenej mierke 1:M$_i$ určená aj doba aktuálnosti množiny bodov $\mathbf{E}_{RF} = \{A^*_i(x_i, y_i, z_i)\}_{i \in \mathbf{I}}$ plochy georeliéfu, pretože zmeny výšok z bodov $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ o hodnoty Δz sú v tomto intervale iba také veľké, že sú pod rozlišovaciu úroveň U$_i$. V danej mierke 1:M$_i$ môžeme tak georeliéf na dĺžku tohto časového intervalu ΔT_{Mi} vyjadriť ako statický systém a v sústave rovníc (1) položiť T = const. Vzťahy $Z_i = g_i\,(x, y, z, T)$ v (1) nadobudnú pre T = const. tvar $Z_i = g_i\,(x, y, z, T = \text{const.})$, takže stavové veličiny Z_i v sústave rovníc (1) budú pre T = const. iba funkciou polohy x, y, z. V takom prípade parciálne derivácie F_T, F_{TT}, F_{xT}, F_{yT}, F_{zT} budú vo vzťahoch (2) a (4) rovné nule, takže vzťahy (2) a (4) nadobudnú tvar

$$dz = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

$$d^2z = F_{xx}dx^2 + F_{yy}dy^2 + F_{zz}dz^2 + 2\,F_{xy}dxdy + 2\,F_{xz}dxdz + 2\,F_{yz}dydz \qquad (5)$$

a stavové veličiny Z_i, obsiahnuté v parciálnych deriváciách vo vzťahoch (5), sú tak pre T = const. akoby „zamrznuté". Po dobu

$\Delta T_{Mi} \langle\, T_{Mi(\text{poč})}, T_{Mi(\text{konc})} \rangle$

sa tak stavové veličiny Z_i a parciálne derivácie s nimi stanú v mierke l:M$_i$ statickými veličinami.

Ak ďalej vo vzťahoch $Z_i = g_i\,(x, y, z, T)$ v (1) pre zjednodušenie neuvažujeme o vertikálnej závislosti stavových veličín Z_i na výške z a na miesto premennej z zavedieme vhodne volenú konštantu, potom tieto vzťahy nadobudnú tvar $Z_i = g_i\,(x, y, z = \text{const.}, T = \text{const})$, takže parciálne derivácie F_z, F_{xz}, F_{yz}, F_{zz} budú vo vzťahoch (5) rovné nule. Stavové veličiny Z_i a s nimi aj parciálne derivácie F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} budú tak iba funkciou polohy x, y, takže vzťahy (5) nadobudnú tvar

$$dz = F_x\,dx + F_y\,dy$$

$$d^2z = F_{xx}dx^2 + 2\,F_{xy}dxdy + F_{yy}dy^2. \qquad (6)$$

Tým boli vytvorené korektné podmienky na opis georeliéfu pomocou funkcie dvoch premenných ako statického systému. Nahraďme vo vzťahoch (6) takto uvažované parciálne derivácie F_x , F_y, F_{xy}, F_{xy}, F_{yy} parciálnymi deriváciami

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} \qquad (7)$$

funkcie dvoch premenných vyjadrenej vo všeobecnom tvare

$$z = f\,(x, y), \text{ resp. } z = z(x, y), \qquad (8)$$

pre ktoré čo do ich veľkosti a priestorového rozloženia nech platí, že

$$z_x \equiv F_x,\; z_y \equiv F_y,\; z_{xx} \equiv F_{xx},\; z_{xy} \equiv F_{xy},\; z_{yy} \equiv F_{yy}\,. \qquad (9)$$

Potom vzťahy (6) budú mať vzhľadom na (9) tvar

$$dz = z_x\,dx + z_y\,dy$$

$$d^2z = z_{xx}\,dx^2 + 2\,z_{xy}\,dxdy + z_{yy}\,dy^2 \qquad (10)$$

a funkcia (8) za predpokladu platnosti (9) bude opisovať tú istú „zamrznutú", a teda statickú plochu vyjadrenú množinou bodov $\mathbf{E}_{RF} = \{A^*_i(x_i, y_i, z_i)\}_{i \in \mathbf{I}}$, ako ju opisuje sústava rovníc (1) pre z = const., T = const. Parciálne derivácie (7) však bez ohľadu na platnosť (9) už neobsahujú žiadnu informáciu o „zamrznutých" stavových veličinách $Z_i \in \mathbf{P}_G$ obsiahnutú v parciálnych deriváciách F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}, iba sú s nimi v zmysle (9) polohovo a numericky totožné.

Vzhľadom na (9) sú však parciálne derivácie (8) vo zvolenej mierke 1:M$_i$ a jej rozlišovacej úrovni U$_i$ presným podkladom na vyjadrenie geometrickej štruktúry plochy statického georeliéfu, určenej množinou jeho morfometrických veličín. Tieto morfometrické veličiny sú pritom v intervale

$\Delta T_{Mi} \langle\, T_{Mi(\text{poč})}, T_{Mi(\text{konc})} \rangle$

plnohodnotnými, v matematicko-fyzikálnom zmysle korektnými vstupnými premennými na vyjadrenie vplyvu georeliéfu na priestorovú diferenciáciu a dynamiku procesov v geografickej sfére.

GEOMETRICKÁ ŠTRUKTÚRA STATICKY UVAŽOVANÉHO GEORELIÉFU; MNOŽINA MORFOMETRICKÝCH VELIČÍN BEZ PARAMETRA ČASU T

Pod geometrickou štruktúrou georeliéfu ako subsystému $\mathbf{S}_{RF}$, uvažovaného bez parametra času T, rozumieme množinu geometrických vlastností georeliéfu vyjadrenú množinou morfometrických veličín $\mathbf{G}_{RF}$, medzi ktorými existuje množina závislostí $\mathbf{R}_{RF}$.

Množina morfometrických veličín georeliéfu ako zvláštneho subsystému $\mathbf{S}_{RF}$ bola formulovaná v prácach Krcha (1973, 1984, 1986, 1987 a 1990). V nich bola na základe parciálnych derivácií z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} funkcie dvoch premenných $z = f(x, y)$ vyjadrená v tvare množiny

$$\mathbf{G}_{RF} = \{z, |\text{grad } z|, \gamma_N, A_N, \omega, (K_N)_t, K_r, F_{GRF}, ...\}, \qquad (11)$$

kde $F_{GRF} = \{N_nF, N_tF, K_rF, F\}$ a prvky z, |grad z|, γ_N, A_N, ω, $(K_N)_t$, K_r sú určené vzťahmi (8) a (12) až (17).

Matematické vzťahy (12), (13), (14) pre morfometrické veličiny (|grad z|, γ_N, A_N)$\in \mathbf{G}_{RF}$ obsahujú pritom parciálne derivácie prvého rádu a vzťahy (15), (16), (17) pre morfometrické veličiny (ω, $(K_N)_t$, K_r) $\in \mathbf{G}_{RF}$ obsahujú parciálne derivácie nielen prvého, ale aj druhého rádu. Každá z týchto morfometrických veličín charakterizuje určitú časť geometrických vlastností georeliéfu v každom jeho bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$. Preto sú to tzv. bodové morfometrické veličiny (Minár 1998).

Naproti tomu morfometrické veličiny $F_{GRF} \in \mathbf{G}_{RF}$ sú síce v každom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ georeliéfu vyjadrené na základe morfometrických veličín ω, $(K_N)_t$, K_r, avšak majú už iný význam: vyjadrujú geometrické formy georeliéfu, ktorými je georeliéf rozčlenený do jednotlivých plošných areálov. Sú to preto tzv. plošné morfometrické veličiny (Minár 1998). Pritom geometrické formy georeliéfu N_nF, N_tF, $K_rF \in F_{GRF} \subset \mathbf{G}_{RF}$ sú v každom jeho bode $A_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ kvantitatívne charakterizované iba jednou z veličín ω, $(K_N)_t$, K_r a geometrické formy F sú v zmysle prác Krcha (1973, 1984.1986 a 1990) v každom jeho bode $A_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ kvantitatívne charakterizované usporiadanou dvojicou (ω, K_r), resp. usporiadanou dvojicou $(\omega, (K_N)_t)$.

V množine $\mathbf{G}_{RF}$ (11) sa preto jednotlivé morfometrické veličiny navzájom líšia tak významom, ako aj vlastnosťami. Význam jej jednotlivých prvkov bol podrobne vyjadrený v citovaných prácach. V potrebnej miere sa ich však z hľadiska cieľa tejto práce dotkneme v jej nasledujúcich častiach.

Geometrická štruktúra georeliéfu a jej vnútorné úrovne; vyjadrenie jej vnútorných úrovní

Rozdielne vlastnosti a význam morfometrických veličín ako prvkov množiny $\mathbf{G}_{RF}$ závisia od parciálnych derivácií a ich rádu, ktoré sú obsiahnuté v ich matematických vzťahoch. Morfometrické veličiny v závislosti od rádu parciálnych derivácií vyjadrujú na príslušnej úrovni určitú časť celkovej geometrickej štruktúry georeliéfu. Geometrickú štruktúru georeliéfu, vyjadrenú množinou morfometrických veličín $\mathbf{G}_{RF}$, možno tak na základe rádu parciálnych derivácií, obsiahnutých v matematických vzťahoch morfometrických veličín, vnútorne významovo rozlíšiť do jednotlivých úrovní. Na tomto základe rozlíšil a klasifikoval elementárne plochy georeliéfu Minár (1998).

Vyjadrime preto parciálne derivácie podľa ich rádu v tvare množiny

$$\{\{0\}, \{z_x, z_y\}, \{z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}\}, \{z_{xxx}, z_{xxy}, z_{xyy}, z_{yyy}\}\}$$

tvorenej podmnožinami parciálnych derivácií prvého, druhého a tretieho rádu, pričom podmnožina $\{0\}$ neobsahuje žiadne parciálne derivácie, takže je prázdnou podmnožinou.

Z tohto hľadiska možno množinu $\mathbf{G}_{RF}$ (11) rozložiť do jednotlivých podmnožín

$$^{(0)}\mathbf{G}_{RF} = \{z\},\ ^{(1)}\mathbf{G}_{RF} = \{|\mathrm{grad}\, z|, \gamma_N, A_N,\},\ ^{(2)}\mathbf{G}_{RF} = \{\omega, (K_N)_t, K_r\},\ \boldsymbol{F}_{GRF}. \quad (11a)$$

Prvkami množín $^{(0)}\mathbf{G}_{RF}$, $^{(1)}\mathbf{G}_{RF}$, $^{(2)}\mathbf{G}_{RF}$ sú morfometrické veličiny z množiny (11), vyjadrené v závislosti od rádu parciálnych derivácií vystupujúcich v ich matematických vzťahoch.

Množina (11) je základnou množinou. Z hľadiska podrobnejšieho vyjadrenia geometrickej štruktúry georeliéfu ju však možno rozšíriť o ďalšie prvky. Tak množinu $^{(2)}\mathbf{G}_{RF} \subset \mathbf{G}_{RF}$ možno v závislosti od rádu parciálnych derivácií rozšíriť o ďalšie nové prvky D_n, D_t, S_n, S_t, ktoré sú parciálnymi deriváciami prvkov množiny $^{(1)}\mathbf{G}_{RF}$. Ich význam uvedieme ďalej. V zmysle prác Krcha (1990, 1992 a 1993) a Jenča (1992 a 1993) bolo toto rozšírenie z hľadiska geomorfologickej klasifikácie elementárnych foriem georeliéfu vyjadrené v práci Minára (1998). Doplníme ju však aj o prvok D_2, ktorým je diskriminant druhej Gaussovej diferenciálnej formy. Jeho význam pre vyjadrenie geometrickej štruktúry georeliéfu bol v nadväznosti na práce Krcha (1990, 1992 a 1999) podrobne vyjadrený v prácach Krcha (1999 a 2001).

Zároveň možno množinu $\mathbf{G}_{RF}$ (11) v závislosti od rádu parciálnych derivácií rozšíriť o podmnožinu ďalších morfometrických veličín $^{(3)}\mathbf{G}_{RF}$, tvorenej prvkami, ktorých matematické vzťahy okrem parciálnych derivácií prvého a druhého rádu obsahujú aj podmnožinu parciálnych derivácií tretieho rádu $\{z_{xxx}, z_{xxy}, z_{xyy}, z_{yyy}\}$. Vzťahy pre prvky množiny $^{(3)}\mathbf{G}_{RF}$ boli odvodené v práci Jenča (1992 a 1993) a pre geomorfologickú klasifikáciu elementárnych foriem georeliéfu vyjadrené v práci Minára (1998). Množinu $\mathbf{G}_{RF}$ (11) možno tak v zmysle poznámky 1 v kartografickom zobrazovacom priestore vyjadriť v tvare

$$\mathbf{G}_{RF,E} = \{^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E},\ ^{(1)}\mathbf{G}_{RF,E},\ ^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E},\ ^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E},\ \boldsymbol{F}_{GRF}\}, \quad (11a_1)$$

kde pre jednotlivé pomnožiny $^{(i)}\mathbf{G}_{RF,E}$, $i = 1, 2, 3$, platí, že

$$\begin{aligned} ^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E} &= \{z\};\\ ^{(1)}\mathbf{G}_{RF,E} &= \{|\mathrm{grad}\, z|, \gamma_N, A_N,\},\\ ^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E} &= \{D_n, D_t, S_n, S_t, \omega, (K_N)_t, K_r, D_2\} \qquad (11b)\\ ^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E} &= \{D_{nn}, D_{tt}, S_{nn}, S_{tt}, \omega_n, [\mathrm{d}(K_N)_t/\mathrm{d}t], A_{tt} \equiv (\mathrm{d}K_r/\mathrm{d}t)\}. \end{aligned}$$

Poznámka 2. Takéto rozlíšenie prvkov množiny $\mathbf{G}_{RF,E}$, ako aj jej rozklad do podmnožín $(11a_1)$, (11b), bolo prvýkrát vyjadrené v práci Minára (1998), morfometrické veličiny, ako aj samotné podmnožiny, boli však v nej čiastočne vyjadrené inou symbolikou a inými pojmami. Z hľadiska kontinuity s prácami Krcha (1973, 1984, 1986, 1987, 1990, 1992 a 1993), v ktorých bol problém exaktnej morfometrickej analýzy georeliéfu ako osobitného priestorového subsystému $\mathbf{S}_{RF}$ geografickej sféry formulovaný a rozvíjaný, pridržiavame sa symboliky použitej v týchto prácach. Z tohoto hľadiska sme pri rozklade množiny $\mathbf{G}_{RF,E}$ použili symboly $^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E}$, $^{(1)}\mathbf{G}_{RF,E}$, $^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E}$, $^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E}$. *Koniec poznámky 2.*

Novými prvkami v množinách (11b) oproti množinám (11a) sú teda prvky $D_n, D_t, S_n, S_t, D_2 \in {}^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E}$ a všetky prvky množiny $^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E}$. Tieto prvky sú deriváciami pôvodných morfometrických veličín $|\mathrm{grad}\, z|$, γ_N, A_N, ω, $(K_N)_t$, K_r z množiny $\mathbf{G}_{RF,E}$. Hodnoty všetkých morfometrických veličín z podmnožín (11b) množiny $\mathbf{G}_{RF,E}$ $(11a_1)$ sú v skalárnej báze funkciou polohy x, y, takže vytvárajú v nej jednotlivé druhy skalárnych polí.

Jednotlivé $^{(i)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ $(i = 1, 2, 3)$ (11b) sú z geomorfometrického hľadiska tzv. základné podmnožiny množiny $(11a_1)$ i-teho rádu $(i = 0, 1, 2, 3)$, vyjadrujúce jednotlivé úrovne vnútornej geometrickej štruktúry georeliéfu.

Charakteristika morfometrických veličín georeliéfu podľa jednotlivých základných podmnožín prvého, druhého a tretieho rádu

Množina $^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF}$ je jednoprvková; jej prvkom je nadmorská výška georeliéfu z vyjadrená vzťahom (8). V množine parciálnych derivácií jej zodpovedá prázdna podmnožina $\{0\}$. Pretože matematický vzťah (8) neobsahuje žiadne parciálne derivácie, je to tzv. morfometrická veličina nultého rádu a množina $^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E}$ je z tohto hľadiska nazvaná ako základná množina nultého rádu, čo je vyjadrené indexom (0) na ľavej strane symbolu $^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E}$ hore.

Množina $^{(1)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ z (11b) je tvorená prvkami, ktorých matematické vzťahy obsahujú podmnožinu parciálnych derivácií prvého rádu $\{z_x, z_y\}$, takže sú z geomorfometrického hľadiska morfometrickými veličinami prvého rádu. Množina ${}^{(1)}\boldsymbol{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ je z tohto hľadiska základnou množinou prvého rádu, pričom jej prvky majú nasledujúci význam:

$|\mathrm{grad}\ z|$ – *absolútna hodnota gradienta výšok* $\mathrm{grad}\, z = z_x\vec{i} + z_y\vec{j}$ daná ako

$$(\mathrm{d}z/\mathrm{d}n) = |\mathrm{grad}\ z| = \mathrm{tg}\ \gamma_N = \sqrt{z_x^2 + z_y^2}\ , \tag{12}$$

ktorá v skalárnej báze (x, y) skalárneho poľa výšok tvorí skalárne pole; priebeh hodnôt $|\mathrm{grad}\ z|$ v smere spádovej krivky georeliéfu je na jej profile vyjadrený na obr. 1. Na obr. 1 je zároveň vo vzťahu k priebehu $|\mathrm{grad}\ z|$ vyjadrený priebeh hodnôt $D_n = (\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}n^2) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}n)(|\mathrm{grad}\ z|)$ (18) a ω (15),

γ_N – *sklon georeliéfu v smere spádnic* vyjadrený z $|\mathrm{grad}\ z|$ vzťahom

$$\gamma_N = \mathrm{arctg}\left(|\mathrm{grad}\ z|\right) = \mathrm{arctg}\sqrt{z_x^2 + z_y^2}\ , \tag{13}$$

ktorý v skalárnej báze (x, y) skalárneho poľa výšok tvorí skalárne pole, ktoré má tie isté matematické vlastnosti ako $|\mathrm{grad}\ z|$ a ktorý je v podobe izočiarového poľa z oblasti Vápeničného potoka vyjadrený na obr. 2 a 3. Z profilu spádovej krivky na obr. 1 názorne vyplýva, že skalárne pole (12) aj (13) nadobúda extrémne hodnoty v množine inflexných bodov I_f na spádových krivkách. Na túto množinu bodov je tak v skalárnej báze, ako aj na georeliéfe viazaný priebeh izočiar $(K_N)_n \equiv \omega = 0$ (15). V izočiarovom poli skalárneho poľa γ_N (13), vyjadreného na obr. 2, preto izočiara $\omega = 0$ prebieha množinou extrémnych hodnôt $(\gamma_N)_E$.

A_N – *orientácia TPG voči svetovým stranám* určená smerom vektora $-\mathrm{grad}\ z$ a vyjadrená zo súradníc jeho jednotkového vektora $-\vec{n}^{\,o}$ takže

$$A_N = \arccos\left(\frac{-z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{-z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{z_y}{z_x}\right). \tag{14}$$

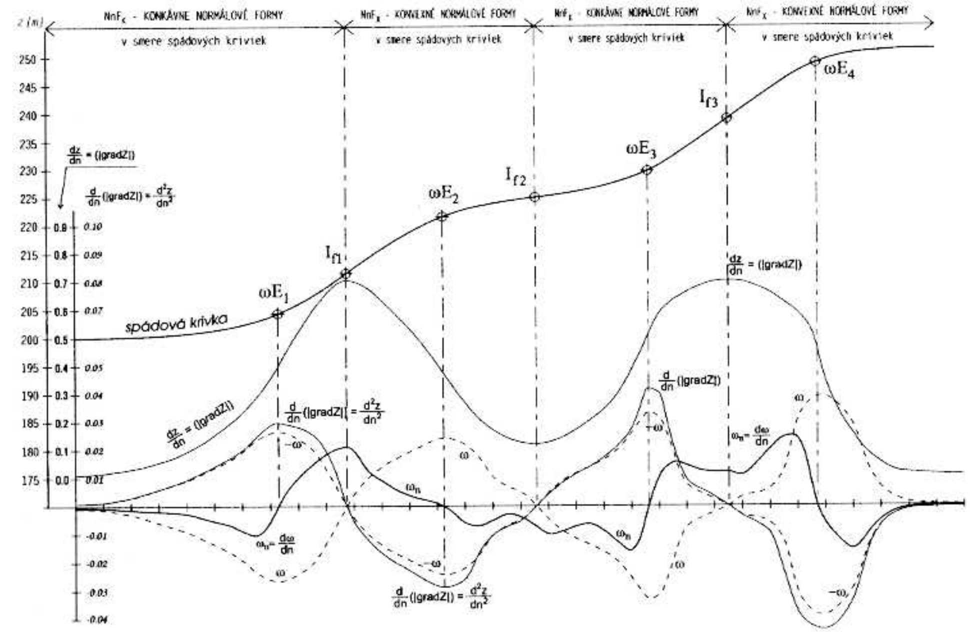
Množina ${}^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ je tvorená prvkami, ktorých matematické vzťahy okrem parciálnych derivácií prvého rádu obsahujú aj podmnožinu parciálnych derivácií druhého rádu $\{z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}\}$, takže sú morfometrickými veličinami druhého rádu. Množina ${}^{(2)}G_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ je teda z tohto hľadiska základnou množinou druhého rádu. Z pôvodnej množiny (11) sú jej prvkami veličiny ω, $(K_N)_t$, K_r; rozšírená je však o prvky D_n, D_t, S_n, S_t, ktoré sú deriváciami prvkov z množiny ${}^{(1)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$. Najprv však uvedieme význam prvkov ω, $(K_N)_t$, K_r z pôvodnej množiny $\mathbf{G}_{RF}$ (11) a až za nimi význam jej nových prvkov D_n, D_t, S_n, S_t. Teda:

$(K_N)_n \equiv \omega$ – *normálová krivosť TPG v smere spádnic* vyjadrená vzťahom

$$\left(K_N\right)_n \equiv \omega = -\frac{z_{xx}z_x^2 + 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_y^2}{\left(z_x^2 + z_y^2\right)\sqrt{\left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^3}}\ , \tag{15}$$

ktorá nadobúda hodnoty $(K_N)_n > 0$, $(K_N)_n = 0$, $(K_N)_n < 0$; hodnoty $(K_N)_n \equiv \omega > 0$ sú na georeliéfe a v jeho skalárnej báze od hodnôt $(K_N)_n \equiv \omega < 0$ navzájom od-

delené izočiarou $(K_N)_n \equiv \omega = 0$. Izočiara $(K_N)_n \equiv \omega = 0$ na georeliéfe prebieha množinou inflexných bodov na množine jeho spádových kriviek (pozri obr. 1) a v izočiarovom poli $|\mathrm{grad}\ z|$ (12) a γ_N (13) prebieha množinou bodov s extrémnymi hodnotami $|\mathrm{grad}\ z|_E$, $(\gamma_N)_E$, čo je vyjadrené na obr. 2.



Obr. 1. Profil spádovej krivky a priebeh $|\mathrm{grad}\ z|$, $\mathrm{d}/\mathrm{d}n(|\mathrm{grad}\ z|)$, ω, ω_n na spádovej krivke

Poznámka 3. Morfometrická veličina $(K_N)_n \equiv \omega$ má dôležitý interdisciplinárny význam, ktorý bol podrobne uvedený v prácach Krcha (1990 a 2001). Spočíva v matematickom opise fyzikálnej stránky priebehu erózno-denudačných procesov na georeliéfe, a to pri vyjadrení vektora sily

$$\vec{F}_n = \left(\vec{F}_n\right)_x + \left(\vec{F}_n\right)_y + \left(\vec{F}_n\right)_z$$

indukujúcej na georeliéfe pohyb častíc pri povrchovom odtokovom režime vody, pričom jeho zložky sú vyjadrené vzťahmi

$$\left(\vec{F}_n\right)_x = \left|\vec{F}\right|\frac{-z_x}{z_x^2 + z_y^2 + 1}\vec{i} = \left(\ \left|\vec{F}\right|\sin\gamma_N.\cos\gamma_N.\cos A_N\ \right)\vec{i}\ ,$$

$$\left(\vec{F}_n\right)_y = \left|\vec{F}\right|\frac{-z_y}{z_x^2 + z_y^2 + 1}\vec{j} = \left(\left|\vec{F}\right|.\sin\gamma_N.\cos\gamma_N.\sin A_N\right)\vec{j}\ ,$$

$$\left(\vec{F}_n\right)_z = \left|\vec{F}\right|\frac{-\left(z_x^2 + z_y^2\right)}{z_x^2 + z_y^2 + 1}\vec{k} = \left(\left|\vec{F}\right|.\sin^2\gamma_N\right)\vec{k}\ .$$

Polohový vektor

$$\vec{F}_n = \vec{F} \sin \gamma_N ,$$

kde

$$\vec{F} = m.\vec{g} ,$$

leží v každom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ topografickej plochy georeliéfu zároveň aj v jej dotykovej rovine kolmo na vrstevnicu, t. j. leží v dotyčnici ku spádovej krivke a je orientovaný na stranu klesajúceho skalára z, $(dz/dn) < 0$. V smere spádových kriviek mení jednak svoju veľkosť

$$\left|\vec{F}_n\right| = \left|\vec{F}\right| \frac{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}$$

a jednak svoj smer. Zmena jeho veľkosti v smere spádových kriviek je vyjadrená vzťahom

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\left|\vec{F}_n\right|\right) = \left|\vec{F}\right|\left(K_N\right)_n \equiv \left|\vec{F}\right|\omega ,$$

z ktorého priamo vyplýva nielen geometrický, ale aj fyzikálny význam veličiny $(K_N)_n \equiv \omega$ (Krcho 1990 a 2001). Práve z tohoto hľadiska bola normálová krivosť ω popri horizontálnej krivosti K_r explicite vyjadrená v matematických vzťahoch opisujúcich dynamiku erózie pôd na georeliéfe v práci Mitáša a Mitášovej (1998). *Koniec poznámky 3.*

$(K_N)_t$ – *normálová krivosť TPG v smere dotyčníc k vrstevniciam* vyjadrená vzťahom

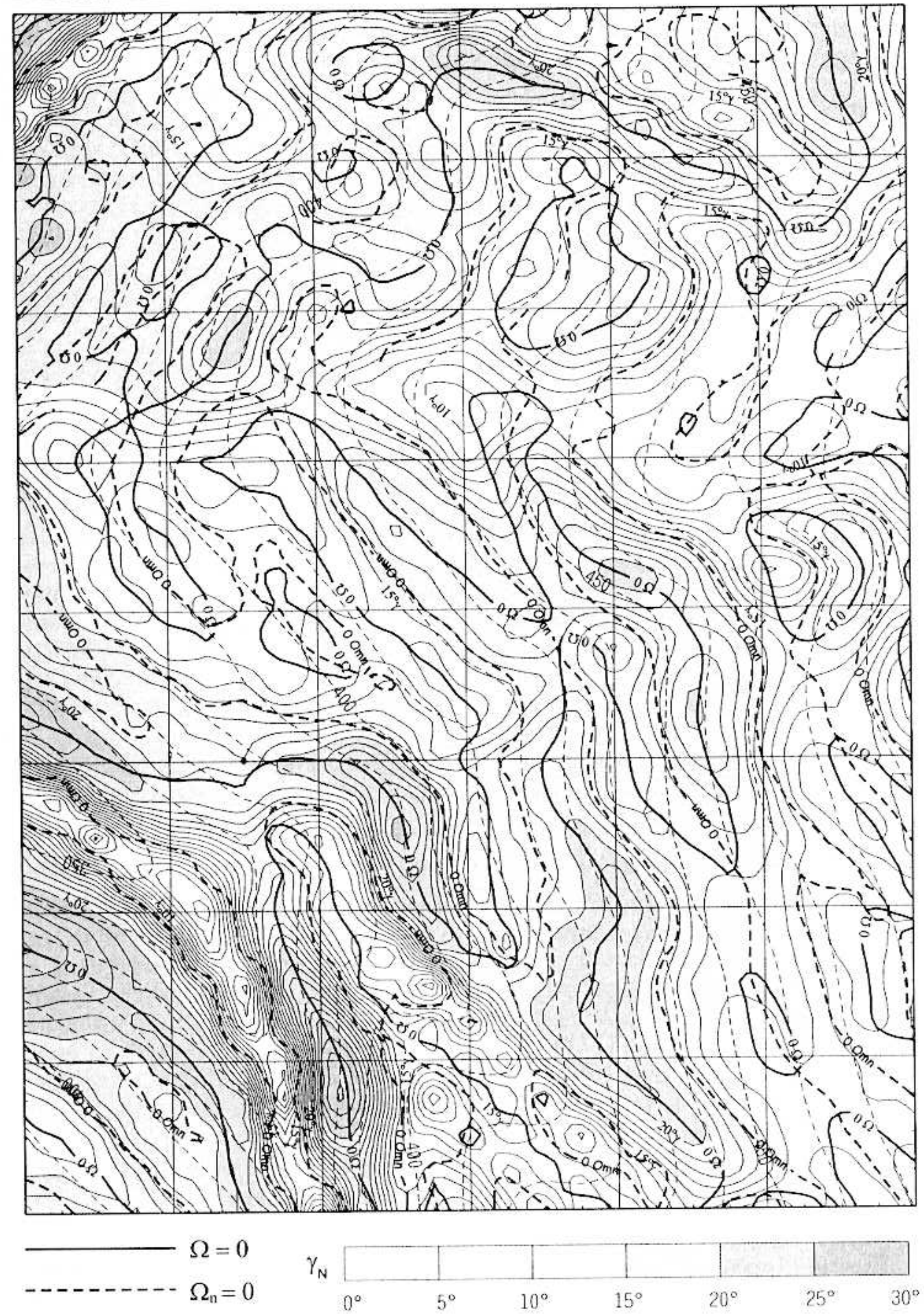
$$\left(K_N\right)_t = -\frac{z_{xx}z_y^2 - 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_x^2}{\left(z_x^2 + z_y^2\right)\sqrt{\left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^3}} , \qquad (16)$$

v ktorom $(K_N)_t$ nadobúda hodnoty $(K_N)_t > 0$, $(K_N)_t = 0$, $(K_N)_t < 0$; hodnoty $(K_N)_t > 0$ sú na georeliéfe a v jeho skalárnej báze od hodnôt $(K_N)_t < 0$ navzájom oddelené izočiarou $(K_N)_t = 0$.

K_r – *horizontálna krivosť georeliéfu* vyjadrená vzťahom

$$K_r = -\frac{z_{xx}z_y^2 - 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_x^2}{\sqrt{\left(z_x^2 + z_y^2\right)^3}} , \qquad (17)$$

ktorá nadobúda hodnoty $K_r > 0$, $K_r = 0$, $K_r < 0$ a ktorá je vo forme izočiarového poľa vyjadrená na obr. 6. Na georeliéfe a v jeho skalárnej báze (x, y) sú hodnoty $K_r > 0$ od hodnôt $K_r < 0$ navzájom oddelené izočiarou $K_r = 0$.



Obr. 2. Priebeh izočiar $\omega = 0$, $\omega_n = 0$ v izočiarovom poli sklonov v smere spádových kriviek

Z porovnania vzťahov (16) a (17) vyplýva, že pre $(K_N)_t = 0$ a $K_r = 0$ platí, že $(K_N)_t = 0 \equiv K_r = 0$, čo je vyjadrené spoločnou rovnicou

$$z_{xx} z_y^2 - 2z_{xy} z_x z_y + z_{yy} z_x^2 = 0. \tag{17a}$$

V zmysle prác Krcha (1984, 1986 a 1990) medzi normálovou krivosťou v smere dotyčníc k vrstevniciam $(K_N)_t$ a medzi horizontálnou krivosťou K_r existuje závislosť daná vzťahom

$$(K_N)_t = K_r \sin \gamma_N \Rightarrow K_r = (K_N)_t / \sin \gamma_N,$$

kde

$$\sin \gamma_N = \sqrt{z_x^2 + z_y^2} \Big/ \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ . \tag{17b}$$

Pre všetky body $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$, v ktorých hodnoty $(K_N)_t \neq 0$, a teda aj $K_p \neq 0$, teda v zmysle vzťahu (17b) platí, že ak je v nich $\gamma_N \neq 0$, potom v nich $(K_N)_t \neq K_r$ (Krcho 1990 a 2001).

Teraz uvedieme význam nových prvkov $D_n, D_t, S_n, S_t \in {}^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$, kde:

$D_n \equiv (\mathrm{d}^2 z/\mathrm{d}n^2)$ – *derivácia* $|\mathrm{grad}\ z| = \mathrm{tg}\ \gamma_N$ *v smere spádových kriviek* (v smere dotyčníc n k spádovým krivkám so smerovými uhlami α_n) je určená vzťahom

$$D_n = \frac{\partial}{\partial n}\left(|\mathrm{grad}\ z|\right) \equiv \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}n^2} = \frac{z_{xx} z_x^2 + 2 z_{xy} z_x z_y + z_{yy} z_y^2}{z_x^2 + z_y^2}\ , \tag{18}$$

ktorý vyjadruje intenzitu zmeny $|\mathrm{grad}\ z|$ v smere spádových kriviek na element dĺžky $\mathrm{d}n$, pričom nadobúda hodnoty $D_n > 0$; $D_n = 0$; $D_n < 0$. Zo vzťahu (18) v porovnaní zo vzťahom (15) vyplýva, že

$$D_n = 0 \equiv \omega = 0 \Rightarrow z_{xx} z_x^2 + 2\, z_{xy} z_x z_y + z_{yy} z_y^2 = 0, \tag{19}$$

čo je zároveň rovnica izočiary nulovej normálovej krivosti georeliéfu v smere spádových kriviek. Z porovnania vzťahu (15) so vzťahom (18) však vyplýva, že pre $(K_N)_n \equiv \omega \neq 0$ a $D_n \neq 0$, $(K_N)_n \equiv \omega \neq D_n$. Veličina D_n bola odvodená a vzhľadom na veličinu $(K_N)_n \equiv \omega$ bola podrobne interpretovaná a graficky vyjadrená v práci Krcha (2001). Pre izočiaru $D_n = 0 \equiv \omega = 0$ (19) platí, že v skalárnom poli $|\mathrm{grad}\ z|$ (12) a γ_N (13) prechádza množinou bodov s extrémnymi hodnotami $|\mathrm{grad}\ z|_E$, resp. $(\gamma_N)_E$ (obr. 2). Priebeh hodnôt D_n na profile spádovej krivky je vyjadrený na obr. 1. Z obr. 1 vidno, že hodnoty $|\mathrm{grad}\ z|_E$, resp. $(\gamma_N)_E$ sú viazané na inflexné body krivky $|\mathrm{grad}\ z|$.

D_t – *derivácia* $|\mathrm{grad}\ z| = \mathrm{tg}\ \gamma_N$ *v smere vrstevníc* (v smere dotyčníc t k vrstevniciam so smerovými uhlami $\alpha_t = \alpha_n + 90°$) je určená vzťahom

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{grad}\ z\right) = \frac{z_x z_y (z_{xx} - z_{yy}) + z_{xy}(z_y^2 + z_x^2)}{(z_x^2 + z_y^2)}\ , \tag{20}$$

ktorý vyjadruje zmenu hodnôt skalára $|\mathrm{grad}\ z|$ o hodnotu $\mathrm{d}|\mathrm{grad}\ z|$ na element vzdialenosti $\mathrm{d}t$ v horizontálnom smere (v smere dotyčníc k vrstevniciam), pri-

čom na georeliéfe a jeho skalárnej báze (x, y) nadobúda hodnoty $D_t < 0$, $D_t = 0$, $D_t > 0$. Hodnoty $D_t < 0$ sú od hodnôt $D_t > 0$ navzájom oddelené izočiarou $D_t = 0$, vyjadrenej z (20) v tvare

$$z_x z_y (z_{xx} - z_{yy}) + z_{xy}(z_y^2 - z_x^2) = 0, \tag{21}$$

pričom izočiara $D_t = 0$ (21) prechádza v skalárnom poli $|\mathrm{grad}\ z|$ množinou jeho extrémnych hodnôt $|\mathrm{grad}\ z|_E$, avšak s iným priebehom ako izočiara $D_n = 0 \equiv (K_N)_n = 0$ (19).

$S_n \equiv (\mathrm{d}\gamma_N/\mathrm{d}n)$ – *derivácia uhla sklonu v smere spádových kriviek*, určená vzťahom

$$S_n \equiv \frac{d\gamma_N}{dn} = \frac{z_x^2 z_{xx} + 2 z_x z_y z_{xy} + z_y^2 z_{yy}}{(1 + z_x^2 + z_y^2)(z_x^2 + z_y^2)}\ , \tag{22}$$

ktorá v skalárnej báze (x, y) vyjadruje v oblúkovej miere zmenu uhla γ_N v smere dotyčnice n k ortogonálnej trajektórii o hodnotu $\mathrm{d}\gamma_N$ na element jej dĺžky $\mathrm{d}n$. $S_n \equiv (\mathrm{d}\gamma_N/\mathrm{d}n)$ nadobúda v skalárnej báze hodnoty $S_n < 0$, $S_n = 0$, $S_n > 0$. Hodnoty $S_n < 0$ sú od hodnôt $S_n > 0$ oddelené izočiarou $S_n = 0$. Z porovnania vzťahu (22) so vzťahom (18) vyplýva, že $S_n \equiv \omega = 0$. Z porovnania oboch vzťahov však zároveň vyplýva, že pre hodnoty $S_n \neq 0$ ($S_n > 0 \wedge S_n < 0$) a pre hodnoty $D_n \neq 0$ ($D_n > 0 \wedge D_n < 0$) platí, že $D_n \neq S_n$. Izočiara $S_n \equiv \omega = 0$ na topografickej ploche georeliéfu oddeľuje od seba konvexné časti spádových kriviek od konkávnych a v skalárnom poli $|\mathrm{grad}\ z|$ (12), ako aj v skalárnom poli γ_N (13), prechádza množinou bodov s extrémnymi hodnotami $|\mathrm{grad}\ z|_E$ a $(\gamma_N)_E$ (obr. 2).

Poznámka 4. V prácach Jenča (1992 a 1993) bol vyjadrený nasledujúci súvis medzi veličinou $S_n \equiv (\mathrm{d}\gamma_N/\mathrm{d}n)$ (22) a veličinou $(K_N)_n \equiv \omega$ (15): elementu dĺžky $\mathrm{d}n$ na ortogonálnej trajektórii v skalárnej báze (x, y) zodpovedá na spádovej krivke topografickej plochy georeliéfu element dĺžky $\mathrm{d}n_{sp}$, pričom medzi $\mathrm{d}n$ a $\mathrm{d}n_{sp}$ platí

$$\left(\mathrm{d}n/\mathrm{d}n_{sp}\right) = \cos \gamma_N = 1 \Big/ \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ ,$$

takže vynásobením vzťahu (22) touto veličinou dostávame vzťah pre normálovú krivosť $\omega \equiv (K_N)_n$ v smere spádových kriviek (15). *Koniec poznámky 4.*

$S_t = (\mathrm{d}\gamma_N/\mathrm{d}t)$ – *derivácia uhla sklonu* γ_N *v smere dotyčníc k vrstevniciam*, vyjadrená vzťahom

$$S_t \equiv \frac{d\gamma_N}{dt} = \frac{z_x z_y (z_{xx} - z_{yy}) + z_{xy}(z_y^2 + z_x^2)}{(1 + z_x^2 + z_y^2)(z_x^2 + z_y^2)}\ , \tag{23}$$

pričom v oblúkovej miere na ploche georeliéfu a v jeho skalárnej báze vyjadruje zmenu uhla sklonu γ_N v smere dotyčníc t k vrstevniciam. Vyjadruje teda intenzitu zmeny uhla sklonu γ_N (uvažovaného v smere spádových kriviek) na element dĺžky $\mathrm{d}t$ v smere vrstevnice. V skalárnej báze (x, y) veličina S_t vytvára skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $S_t < 0$, $S_t = 0$, $S_t > 0$. Hodnoty $S_t < 0$ sú v skalárnej báze oddelené od hodnôt $S_t > 0$ izočiarou $S_t = 0$, ktorá je identická s izočiarou $D_t = 0$, vyjadrenou rovnicou (21). Z porovnania vzťahov (23) a (20) vyplýva, že pre hodnoty $S_t \neq 0$ ($S_t > 0 \wedge S_t < 0$) a hodnoty $D_t \neq 0$ ($D_t > 0 \wedge D_t < 0$) platí, že $S_t \neq D_t$. V skalárnom poli |grad z| (12) a γ_N (13) prebieha izočiara $S_t = 0$ množinou bodov s extrémnymi hodnotami $|\text{grad } z|_E$ a $(\gamma_N)_E$, čo je v jeho izočiarovom poli vyjadrené na obr. 3.

D_2 – *diskriminant druhej Gaussovej diferenciálnej formy*, vyjadrený vzťahom

$$D_2 = \frac{z_{xx} - z_{xy}^2}{1 + z_x^2 + z_y^2}\ , \qquad (24)$$

ktorým je v skalárnej báze (x, y) určené skalárne pole. Skalár D_2 v nej pritom nadobúda hodnoty $D_2 < 0$, $D_2 = 0$, $D_2 > 0$, kde množina bodov s hodnotami $D_2 < 0$ je od množiny bodov $D_2 > 0$ oddelená izočiarou

$$\mathrm{D}_2 = \mathrm{z}_{xx} - \mathrm{z}_{xy} = 0 \qquad (24b)$$

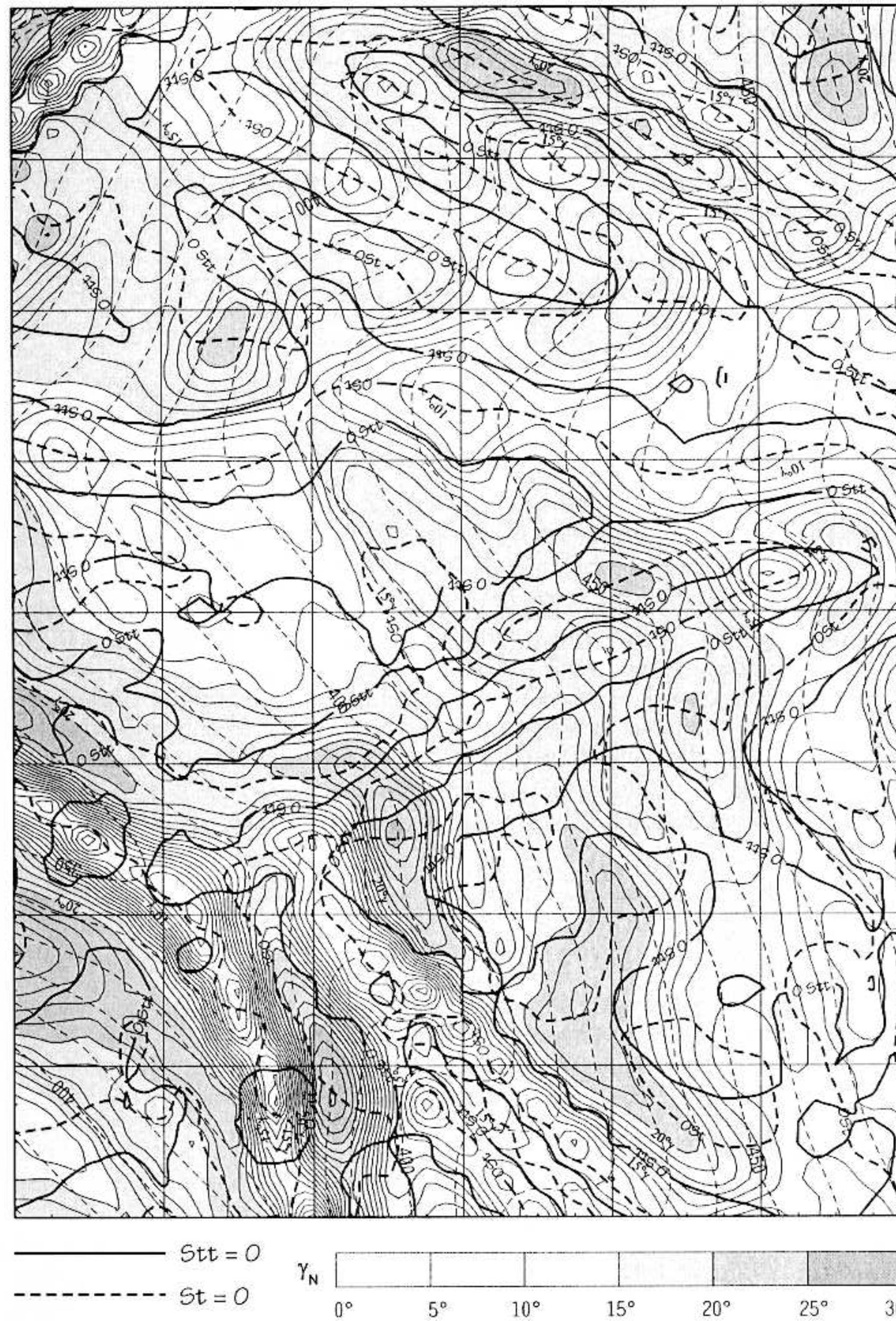
Poznámka 5. V nadväznosti na práce Krcha (1990, 1992, 1993, 1999 a 2001) uveďme, že diskriminant D_2 je z hľadiska detailnejšiej vnútornej klasifikácie celkových geometrických foriem georeliéfu $F \in \mathbf{G}_{RF}$ (11) dôležitou morfometrickou veličinou, ktorá v infinitezimálnom okolí každého bodu $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ topografickej plochy georeliéfu vyjadruje jej dôležité štruktúrne vlastnosti. Podľa toho, aké hodnoty $D_2 < 0$, $D_2 = 0$, $D_2 > 0$ v danom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ topografickej plochy nadobúda, možno jej body rozlíšiť na eliptické, v ktorých je $D_2 > 0$, parabolické, v ktorých je $D_2 = 0$ a hyperbolické, v ktorých je $D_2 < 0$. V tých bodoch $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$, v ktorých je $D_2 > 0$, oskulačný paraboloid nadobúda tvar eliptického paraboloidu a Dupinova indikatrix má tvar elipsy. V bodoch, kde $D_2 = 0$, oskulačný paraboloid nadobúda tvar parabolického valca a Dupinova indikatrix má tvar dvoch paralelných priamok. V bodoch, v ktorých $D_2 < 0$, oskulačný paraboloid nadobúda tvar hyperbolického paraboloidu a Dupinova indikatrix má tvar dvojného súboru hyperbol. *Koniec poznámky 5*.

Množina ${}^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E} = \{D_{nn}, D_{tt}, S_{nn}, S_{tt}, \omega_n, [\mathrm{d}(K_N)_t/\mathrm{d}t], A_{tt} \equiv (\mathrm{d}K_t/\mathrm{d}t)\} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ je tvorená prvkami, ktorých matematické vzťahy okrem parciálnych derivácií prvého a druhého rádu obsahujú aj podmnožinu parciálnych derivácií tretieho rádu $\{z_{xxx}, z_{xxy}, z_{xyy}, z_{yyy}\}$, takže jej prvky sú morfometrickými veličinami tretieho rádu. Množina ${}^{(3)}\boldsymbol{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ je z tohto hľadiska potom základnou množinou tretieho rádu. Pre všetky prvky množiny ${}^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ platí, že sú deriváciami prvkov z množiny ${}^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$. Teda:

$D_{nn} = (\mathrm{d}^2|grad\ z|/\mathrm{d}^2n) \equiv \mathrm{d}^3z/\mathrm{d}n^3$ – *druhá derivácia absolútnej hodnoty gradienta výšok v smere spádových kriviek,* určená vzťahom (25)

$$D_{nn} = \frac{\partial^2}{\partial n}(|\mathrm{grad}z|) \equiv \frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}n^3} = \frac{[(A+C+E)J - 2LG)]z_x + [(B+D+F)J - 2LH]z_y}{\sqrt{J^5}}\ ,$$

ktorý vyjadruje veľkosť zmeny prvej derivácie absolútnej hodnoty vektora grad z v smere spádovej krivky na element jej dĺžky dn. Jednotlivé veličiny na pravej strane vzťahu (25) sú vyjadrené v (26a).



Obr. 3. Priebeh izočiar $S_t = 0$, $S_{tt} = 0$ v izočiarovom poli sklonov v smere spádových kriviek

V skalárnej báze (x, y) veličina D_{nn} vytvára skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $D_{nn} < 0$, $D_{nn} = 0$, $D_{nn} > 0$. Hodnoty $D_{nn} < 0$ sú v skalárnej báze oddelené od hodnôt $D_{nn} > 0$ izočiarou $D_{nn} = 0$, ktorá na topografickej ploche georeliéfu a v jeho skalárnej báze (x, y) prebieha množinou bodov s extrémnymi hodnotami $\omega_{E,max}$ normálovej krivosti georeliéfu v smere spádových kriviek.

$S_{nn} = \mathrm{d}^2\gamma_N/\mathrm{d}n^2$ *druhá derivácia uhla sklonu v smere spádových kriviek*, určená vzťahom (26)

$$S_{nn} = \frac{d^2\gamma_N}{dn^2} = \frac{\left[KJ(A+C+E) - 2LG(1+2J)\right]z_x + \left[KJ(B+D+F) - 2LH - (1+2J)\right]z_y}{K^2\sqrt{J^5}}$$

kde

$$\begin{aligned}
&A = 2\,z_x\,z_{xx}^{\;2} + z_x^{\;2}\,z_{xxx} && B = 2\,z_x\,z_{xx}\,z_{xy} + z_x^{\;2}\,z_{xxy}\\
&C = 2\,z_y\,z_{xx}z_{xy} + 2\,z_x\,z_{xy}^{\;2} + z_x\,z_y\,z_{xyx} && D = 2\,z_y\,z_{xy}^{\;2} + 2\,z_x\,z_{xy}\,z_{yy} + 2\,z_x\,z_y\,z_{xyy}\\
&E = 2\,z_y\,z_{xy}z_{yy} + z_y^{\;2}\,z_{yyx} && F = 2\,z_y\,z_{yy}^{\;2} + z_y^{\;2}\,z_{yyy} \qquad\qquad (26a)\\
&G = z_x\,z_{xx} + z_y\,z_{xy}\,; && H = z_x\,z_{xy} + z_y\,z_{yy}\\
&J = z_x^{\;2} + z_y^{\;2} && K = 1 + z_x^{\;2} + z_y^{\;2}\\
&L = z_x^{\;2}\,z_{xx} + 2\,z_x\,z_y\,z_{xy} + z_y^{\;2}\,z_{yy},
\end{aligned}$$

ktorý vyjadruje veľkosť zmeny prvej derivácie uhla γ_N v smere spádovej krivky na element jej dĺžky dn. Veličina S_{nn} vytvára v skalárnej báze (x, y) skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $S_{nn} < 0$, $S_{nn} = 0$, $S_{nn} > 0$. Tieto sú navzájom oddelené izočiarou $S_{nn} = 0$, ktorá na topografickej ploche georeliéfu a v jeho skalárnej báze (x, y) prebieha množinou bodov s extrémnymi hodnotami normálovej krivosti georeliéfu v smere spádových kriviek $\omega_{E,max}$, takže $S_{nn} \equiv D_{nn} = 0$.

$S_{tt} = (\mathrm{d}^2\gamma N/\mathrm{d}t^2)$ – *druhá derivácia uhla sklonu v smere spádových kriviek γ_N uvažovaná v smere dotyčníc t k vrstevniciam* je určená vzťahom

$$S_{tt} = \frac{d^2\gamma_N}{dt^2} = \frac{\left[KJW - 2L^{**}H(1+2J)\right]z_x + \left[-KJQ + 2L^{**}G(1+2J)\right]z_y}{K^2\sqrt{J^5}}, \quad (27)$$

kde

$$W = (N + P + S + U)$$
$$Q = (M + O + R + T),$$

pričom

$$\begin{aligned}
&M = z_y\,z_{xx}\,z_{yy} + z_x\,z_{xy}z_{yy} + z_x\,z_y\,z_{yyx}\\
&N = z_y\,z_{xy}\,z_{yy} + z_x\,z_{yy}^{\;2} + z_x\,z_y\,z_{yyy}\\
&O = -\,z_x\,z_{xx}^{\;2} - z_x\,z_{xy}\,z_{xx} - z_x\,z_y\,z_{xxx}\\
&P = -\,z_y\,z_{xx}\,z_{xy} - z_x\,z_{xx}\,z_{yy} - z_x\,z_y\,z_{xxy}\\
&R = z_x^{\;2}\,z_{xyx} + 2\,z_x\,z_{xy}\,z_{xx} \qquad\qquad (27a)\\
&S = z_y^{\;2}\,z_{xyy} + 2\,z_x\,z_{xy}^{\;2}\\
&T = -\,z_y^{\;2}\,z_{xyx} - 2\,z_y\,z_{xy}^{\;2}\\
&U = -\,z_y^{\;2}\,z_{xyy} - 2\,z_x\,z_{xy}\,z_{yy}\\
&L^{**} = z_x\,z_y(z_{xx} - z_{yy}) + z_{xy}(z_y^{\;2} + z_x^{\;2})
\end{aligned}$$

a kde koeficienty G, H, J, K sú dané v (26a). Morfometrická veličina S_{tt} vyjadruje veľkosť zmeny veličiny S_t (23) o hodnotu dS_t na element dĺžky dt v smere dotyčnice k vrstevnici. V skalárnej báze (x, y) tvorí skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $S_{tt} < 0$, $S_{tt} = 0$, $S_{tt} > 0$. Tieto sú navzájom oddelené izočiarou $S_{tt} = 0$. V izočiarovom poli $|\mathrm{grad}\ z|_E$ a $(\gamma_N)_E$ (13) prebieha izočiara $S_{tt} = 0$ množinou jeho inflexných bodov, čo je vyjadrené na obr. 3.

$\omega_n = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}n$ – *derivácia normálovej krivosti ω v smere spádových kriviek*, určená vzťahom

$$\omega_n = \frac{d\omega}{dn} = \frac{KJ\left[(A+C+E)z_x + (B+D+F)z_y\right] - L\left(Gz_x + Hz_y\right)(2K+3J)}{\sqrt{K^5}\sqrt{J^5}}, \quad (28)$$

vyjadruje intenzitu zmeny normálovej krivosti ω v smere spádových kriviek na element dĺžky dn v smere spádovej krivky. V skalárnej báze (x, y) tvorí skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $\omega_n < 0$, $\omega_n = 0$, $\omega_n > 0$. Tieto sú navzájom oddelené izočiarou $\omega_n = 0$. Izočiara $\omega_n = 0$ prechádza na ploche georeliéfu a v skalárnom poli ω množinou bodov s extrémnymi hodnotami $(\omega_n)_{E\,(\mathrm{max,\,min})}$. V izočiarovom poli $|\mathrm{grad}\ z|$ (12) a γ_N (13) prebieha množinou jeho inflexných bodov, čo je v 2D priestore vyjadrené na obr. 2.

$A_{tt} = \mathrm{d}K_r/\mathrm{d}t$ – *derivácia horizontálnej krivosti v smere dotyčníc k vrstevniciam* určená vzťahom

$$A_{tt} = \frac{dK_r}{dt} = \frac{\left[\left(B^* - D + F^*\right)J - 3L^*H\right]z_x + \left[-\left(A^* - C + E^*\right)J + L^*G\right]z_y}{J^3}, \quad (29)$$

kde

$$\begin{aligned}
&B^* = 2\,z_y\,z_{xx}z_{yy} + z_y^{\;2}\,z_{xxy}\\
&A^* = 2\,z_y\,z_{xy}\,z_{xx} + z_y^{\;2}\,z_{xxx}\\
&F^* = 2\,z_x\,z_{xy}z_{yy} + z_x^{\;2}\,z_{yyy} \qquad\qquad (29a)\\
&E^* = 2\,z_x\,z_{xx}\,z_{yy} + z_x^{\;2}\,z_{yyx}\\
&L^* = z_y^{\;2}\,z_{xx} - 2\,z_x\,z_y z_{xy} + z_x^{\;2}\,z_{yy},
\end{aligned}$$

pričom koeficienty C, D, G, H, J sú vyjadrené v (26a). Morfometrická veličina A_{tt} vyjadruje veľkosť zmeny horizontálnej krivosti K_r o hodnotu dK_r na element dĺžky dt v smere dotyčnice k vrstevnici. V skalárnej báze (x, y) veličina S_{tt} vytvára skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $A_{tt} < 0$, $A_{tt} = 0$, $A_{tt} > 0$. Hodnoty $A_{tt} < 0$ sú v skalárnej báze oddelené od hodnôt $A_{tt} > 0$ izočiarou $A_{tt} = 0$. Izočiara $A_{tt} = 0$ prechádza na ploche georeliéfu a v jej skalárnom poli množinou bodov s extrémnymi hodnotami $(K_r)_{E\,(\mathrm{max,\,min})}$.

Poznámka 6. Vzťahy (25) až (29) pre morfometrické veličiny D_{nn}, S_{nn}, S_{tt}, ω_n, $A_{tt} \equiv (\mathrm{d}K_r/\mathrm{d}t)$ sú upravené oproti vzťahom, ktoré boli pre tie isté veličiny odvodené v práci Jenča (1992 a 1993). Významovo sú však identické. *Koniec poznámky 6.*

GEOMETRICKÉ FORMY GEORELIÉFU A VYJADRENIE ICH VNÚTORNEJ ŠTRUKTÚRY – KLASIFIKÁCIA CELKOVÝCH GEOMETRICKÝCH FORIEM

Geometrické formy georeliéfu tvoria množinu $\boldsymbol{F}_{GRF} = \{N_nF, N_tF, K_rF, F\}$.

$N_nF \in F_{GRF}$ sú *normálové formy georeliéfu v smere spádových kriviek*, kvantitatívne charakterizované v každom jeho bode $A^*_i(x_\mathrm{i}, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ jednou veličinou, ktorou je ω. Boli vyjadrené na základe veľkosti a znamienka (±) veličiny ω (15) a vo formalizovanom tvare boli vyjadrené v tvare usporiadanej trojice $N_nF = [N_nF_X\ (\omega > 0), N_nF_L(\omega = 0), N_nF_K\ (\omega < 0)]$. Z detailu povodia Vápeničného potoka sú vyjadrené na obr. 4, kde sa vyskytujú $N_nF = [N_nF_X\ (\omega > 0), N_nF_K\ (\omega < 0)]$, ohraničené izočiarou $\omega = 0$.

$N_tF \in F_{GRF}$ sú *normálové formy georeliéfu v smere dotyčníc k vrstevniciam*; v každom jeho bode $A^*_i(x_\mathrm{i}, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ sú kvantitatívne charakterizované jednou veličinou, ktorou je $(K_N)_t$ (16). Boli vyjadrené na základe veľkosti a znamienka (±) tejto morfometrickej veličiny $(K_N)_t$ a vo formalizovanom tvare boli zapísané v tvare usporiadanej trojice $N_tF = [N_tF_X((K_N)_t > 0), N_tF_L((K_N)_t = 0), N_tF_K((K_N)_t < 0)]$,

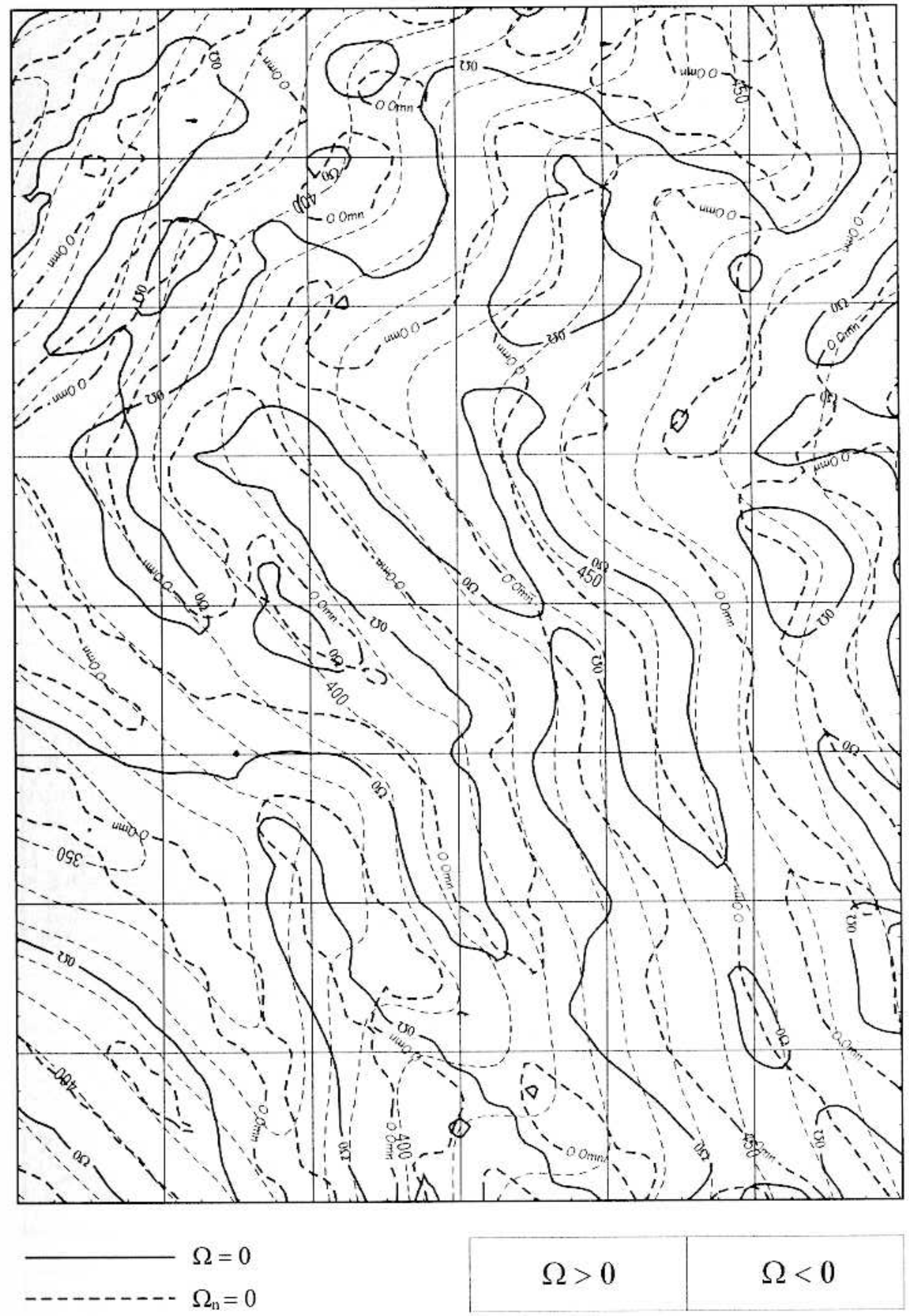
$K_rF \in F_{GRF}$ sú *horizontálne formy georeliéfu*, v každom jeho bode $A^*_i(x_\mathrm{i}, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ kvantitatívne charakterizované jednou morfometrickou veličinou, ktorou je K_r. Boli vyjadrené na základe veľkosti a znamienka (±) tejto veličiny a vo formalizovanom tvare sú zapísané ako usporiadaná trojica $K_rF = [K_rF_X\ (K_r > 0), K_rF_L(K_r = 0), K_rF_K(K_r < 0)]$. Vyjadrené sú na obr. 5, na ktorom sú zobrazené $K_rF = [K_rF_X\ (K_r > 0), K_rF_K\ (K_r < 0)]$, ohraničené izočiarou $K_r = 0$. Ich vnútorná štruktúra je na obr. 5 čiastočne graficky vyjadrená priebehom izočiar $S_t = 0$, $S_{tt} = 0$ a $A_{tt} = 0$.

Vzhľadom na to, že $((K_N)_t = 0) \equiv (\omega = 0)$, formy N_tF sú priestorovo vždy totožné s formami K_rF, avšak v zmysle vzťahov (17b) sú vo vnútri navzájom odlišné.

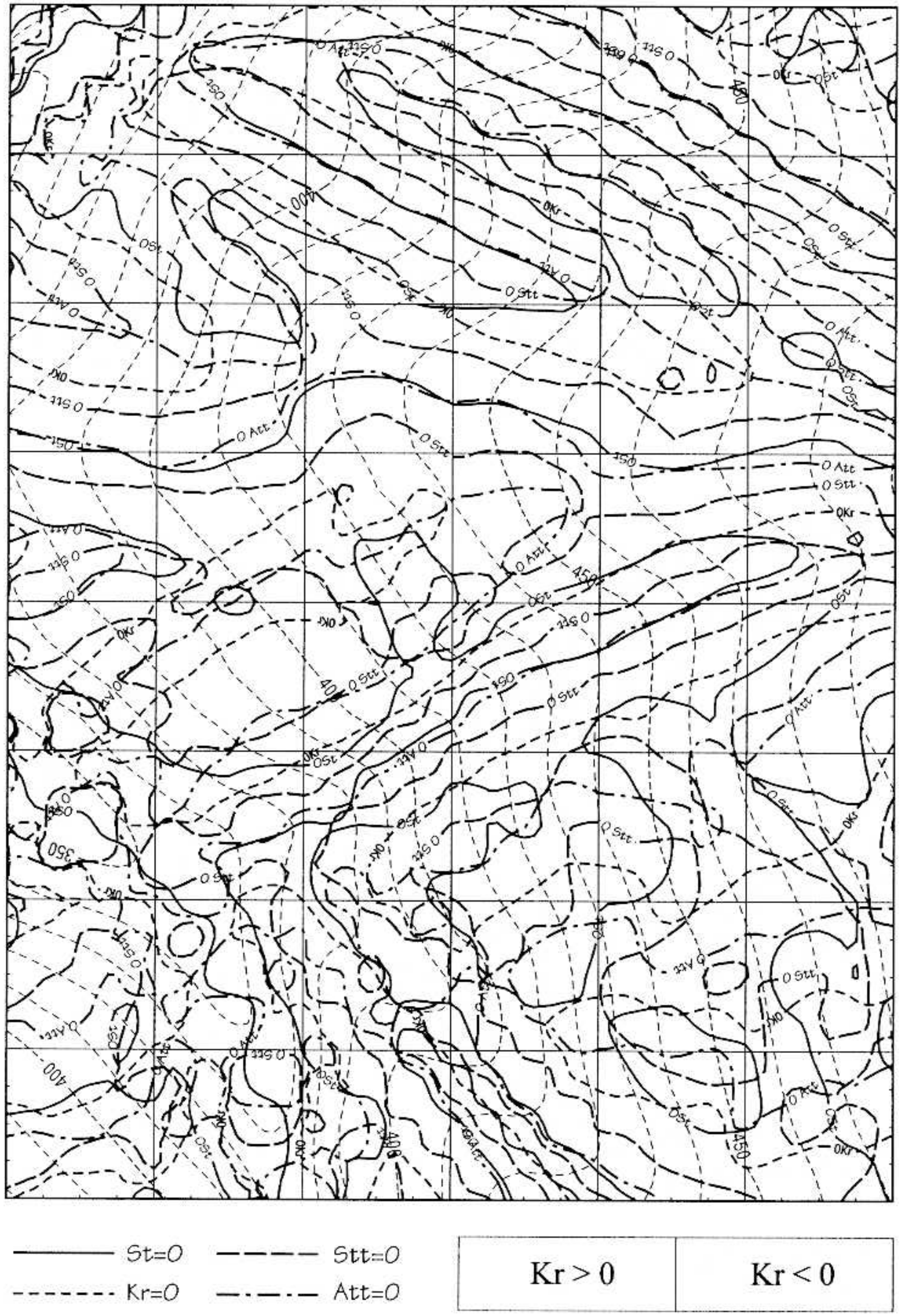
Geometrické formy N_nF, N_tF, K_rF sú dôležitými parciálnymi charakteristikami georeliéfu. Každá z nich charakterizuje tvar georeliéfu v jeho ľubovoľnom bode $A^*_i(x_\mathrm{i}, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ veľkosťou a znamienkom jednej morfometrickej veličiny a v jednom smere: N_nF v smere dotyčníc n k spádovým krivkám a N_tF spolu s K_rF v smere dotyčníc t k vrstevniciam. Spolu teda charakterizujú tvary georeliéfu v dvoch základných smeroch (n, t) určených ortogonálnou sieťou spádových kriviek a vrstevníc. Sú tak podkladom pre vyjadrenie celkových geometrických foriem georeliéfu $F \subset F_{GRF}$.

Celkové geometrické formy georeliéfu a ich klasifikácia

Celkové geometrické formy georeliéfu $F \subset F_{GRF}$ sú v zmysle uvedeného formy, ktoré sú na základe parciálnych foriem N_nF, N_tF, K_rF v každom bode $A^*_i(x_\mathrm{i}, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ spojitej ortogonálnej siete kriviek georeliéfu kvantitatívne charakterizované súčasne v dvoch základných, na seba kolmých smeroch (n, t) dvomi veličinami, vyjadrenými v tvare usporiadanej dvojice (ω, K_r), alebo dvojice $(\omega, (K_N)_t)$.



Obr. 4. Normálové formy georeliéfu N_nF v smere spádových kriviek



Obr. 5. Horizontálne formy georeliéfu K_rF a ich štruktúra (S_t =0, S_{tt} = 0, A_{tt} = 0)

Boli vyjadrené v prácach Krcha (1973, 1984, 1986, 1987, 1990 a 2001) a formulované na základe karteziánskeho súčinu $\mathbf{F} = N_nF \times N_tF$ uspriadaných trojíc $N_nF = [N_nF_X\ (\omega > 0), N_nF_L(\omega = 0), N_nF_K\ (\omega < 0)]$, $N_tF = [N_tF_X((K_N)_t > 0), N_tF_L((K_N)_t = 0), N_tF_K((K_N)_t < 0)]$, resp. karteziánskeho súčinu $\mathbf{F} = N_nF \times K_rF$, usporiadaných trojíc $N_nF = [N_nF_X\ (\omega > 0), N_nF_L(\omega = 0), N_nF_K\ (\omega < 0)]$, $K_rF = [K_rF_X\ (K_r > 0), K_rF_L(K_r = 0), K_rF_K(K_r < 0)]$. Prvkami týchto karteziánskych súčinov sú usporiadané dvojice, kde každej usporiadanej dvojici bol priradený symbol F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK}, ..., tak, že tvoria usporiadanú množinu

$$F(F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK}, F_{XL}, F_{LX}, F_{KL}, F_{LK}, F_{LL}) \subset \mathbf{G}_{RF,E}. \tag{30}$$

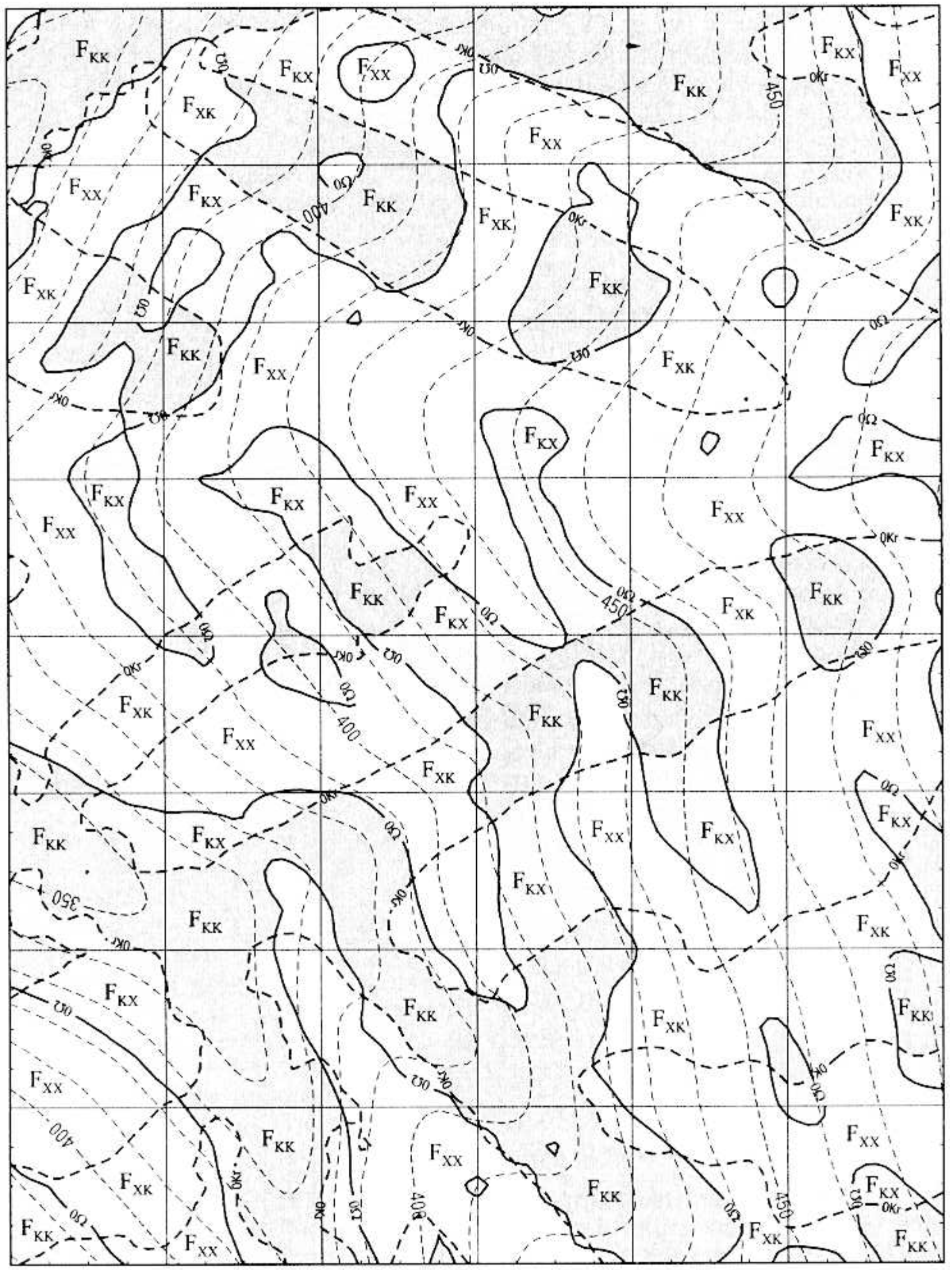
Na základe veličín ω, $(K_N)_t$, K_r sú zároveň celkové geometrické formy georeliéfu v každom jeho bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ kvantitatívne vyjadrené pomocou abstraktného 2D priestoru, uvažovaného v súradnicovej sústave $\langle O, \omega, K_r \rangle$, alebo v súradnicovej sústave $\langle O, \omega, (K_N)_t \rangle$, priradenej k bodu $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$, kde O je počiatok súradnicovej sústavy $\langle O, \omega, K_r, O, \omega, (K_N)_t \rangle$, pre ktorý platí, že $O \equiv A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ a kde ω, K_r alebo ω, $(K_N)_t$ sú dvojice vyjadrujúce navzájom na seba kolmé osi, na ktoré sa ako súradnice vynášajú hodnoty krivostí ω, K_r, $(K_N)_t$.

Ku každému bodu georeliéfu $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ je tak v abstraktnom priestore O, ω, K_r priradený bod $B_i(\omega, K_r)$ a v abstraktnom priestore $\langle O, \omega, (K_N)_t \rangle$ je mu priradený bod $B_i(\omega, (K_N)_t)$. Poloha bodu $B_i(\omega, K_r)$, resp bodu $B_i(\omega, (K_N)_t)$ v tomto priestore kvantitatívne vyjadruje celkovú geometrickú formu v každom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ georeliéfu (Krcho 1984, 1986, 1990 a 2001).

Podľa toho, aké hodnoty morfometrické veličiny ω, $(K_N)_t$, K_r nadobúdajú v jednotlivých kvadrantoch súradnicovej sústavy $\langle O, \omega, K_r \rangle$, $\langle O, \omega, (K_N)_t \rangle$, v zmysle karteziánskych súčinov pre usporiadané dvojice (ω, K_r), $(\omega, (K_N)_t)$ a k nim predradené symboly z (30) platí, že

$$\begin{aligned}
&F_{XX}\ [(\omega > 0, K_r > 0) \wedge (\omega > 0, (K_N)_t > 0)]\\
&F_{KX}\ [(\omega < 0, K_r > 0) \wedge (\omega < 0, (K_N)_t > 0)]\\
&F_{KK}\ [(\omega < 0, K_r < 0) \wedge (\omega < 0, (K_N)_t < 0)]\\
&F_{XK}\ [(\omega > 0, K_r < 0) \wedge (\omega > 0, (K_N)_t < 0)]\\
&F_{XL}\ [(\omega > 0, K_r = 0) \wedge (\omega > 0, (K_N)_t = 0)]\\
&F_{LX}\ [(\omega = 0, K_r > 0) \wedge (\omega = 0, (K_N)_t > 0)]\\
&F_{KL}\ [(\omega < 0, K_r = 0) \wedge (\omega < 0, (K_N)_t = 0)]\\
&F_{LK}\ [(\omega = 0, K_r < 0) \wedge (\omega = 0, (K_N)_t < 0)]\\
&F_{LL}\ [(\omega = 0, K_r = 0) \wedge (\omega = 0, (K_N)_t = 0)].
\end{aligned} \tag{31}$$

Veľkosťou a znamienkom usporiadaných dvojíc (ω, K_r), $(\omega, (K_N)_t)$ sú tak určené všetky základné celkové geometrické formy georeliéfu vyjadrené v tvare množiny (30). Štyri základné celkové geometrické formy F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK} z detailu povodia Vápeničného potoka sú zobrazené na obr. 6.



F_{XX}	F_{XK}	F_{KX}	F_{KK}
Ω>0, Kr>0	Ω>0, Kr<0	Ω<0, Kr>0	Ω<0, Kr<0

——— Ω = 0

- - - - Kr = 0

Obr. 6. Celkové geometrické formy georeliéfu

Klasifikácia celkových geometrických foriem so zavedením diskriminantu druhej Gaussovej diferenciálnej formy D_2 ako klasifikačného kritéria

Vzhľadom na vzájomný súvis medzi veličinami $(K_N)_t$ a K_r, vyjadrený vzťahom (17b), možno celkové geometrické formy (30) v každom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ vyjadriť buď na základe jednej z dvoch dvojíc $(\pm\omega; \pm K_r)$, $(\pm\omega, \pm(K_N)_t)$, alebo na základe oboch usporiadaných dvojíc súčasne. V práci Krcha (2001) bolo kritérium usporiadaných dvojíc (ω, K_r), alebo $(\omega, (K_N)_t)$ doplnené o diskriminant druhej Gaussovej diferenciálnej formy D_2, takže pre celkové geometrické formy (30) platí, že

$F_{XX}[(\omega > 0; (K_N)_t > 0) \wedge (\omega > 0; K_r > 0); (D_2 > 0) \vee (D_2 < 0)]$ konvex-konvexné formy,

$F_{KX}[(\omega < 0; (K_N)_t > 0) \wedge (\omega < 0; K_r > 0); (D_2 < 0)]$ konkáv-konvexné formy,

$F_{KK}\ [(\omega < 0; (K_N)_t < 0) \wedge (\omega < 0; K_r < 0); (D_2 > 0) \vee (D_2 < 0)]$ konkáv-konkávne formy,

$F_{XK}\ [(\omega > 0; (K_N)_t < 0) \wedge (\omega > 0; K_r < 0); (D_2 < 0)]$ konvex-konkávne formy,

$F_{XL}\ [(\omega > 0; (K_N)_t = 0) \wedge (\omega > 0; K_r = 0); (D_2 = 0)]$ konvex-lineárne formy,

$F_{LX}\ [(\omega = 0; (K_N)_t > 0) \wedge (\omega = 0; K_r > 0); (D_2 = 0)]$ lineár-konvexné formy,

$F_{KL}\ [(\omega < 0; (K_N)_t = 0) \wedge (\omega < 0; K_r = 0); (D_2 = 0)]$ konkáv-lineárne formy,

$F_{LK}\ [(\omega = 0; (K_N)_t < 0) \wedge (\omega = 0; K_r < 0); (D_2 = 0)]$ lineár-konkávne formy,

$F_{LL}\ [(\omega = 0; (K_N)_t < 0) \wedge (\omega = 0; K_r < 0)]$ lineár-lineárne formy.

Zavedenie diskriminantu druhej Gaussovej diferenciálnej formy D_2 do množiny morfometrických veličín $\mathbf{G}_{RF,E}$ a doplnenie klasifikačného kritéria celkových geometrických foriem o diskriminat D_2 umožňuje bližšie rozlíšiť základné vlastnosti celkových geometrických foriem F_{XX} a F_{KK}.

Poznámka 7. V zmysle poznámky 5 pre celkové geometrické formy F_{XX} a F_{KK} platí, že sú tvorené eliptickými bodmi, v ktorých $D_2 > 0$. Na základe diskriminatu druhej Gaussovej diferenciálnej formy D_2 bolo však v práci Krcha (2001) zároveň detailne ukázané, že v celkových geometrických formách F_{XX} a F_{KK} napriek splneniu podmienky $[(\omega > 0; (K_N)_t > 0) \wedge (\omega > 0; K_r > 0)]$ môže diskriminant D_2 okrem hodnôt $D_2 > 0$ nadobúdať aj hodnoty $D_2 < 0$. Každá z celkových geometrických foriem F_{XX}, F_{KK} môže byť teda tvorená jednak podmnožinou bodov, v ktorých je $D_2 > 0$, a jednak podmnožinou bodov, v ktorých je $D_2 < 0$. Celková množina bodov tvoriacich formy F_{XX} a F_{KK} teda pozostáva, alebo môže pozostávať z podmnožiny bodov s hodnotami $D_2 > 0$ a z podmnožiny bodov s hodnotami $D_2 < 0$. V podmnožine bodov celkových geometrických foriem F_{XX}, F_{KK} s hodnotami $D_2 < 0$ oskulačný paraboloid nadobúda tvar hyperbolického paraboloidu a Dupinova indikatrix nadobúda tvar dvojného súboru hyperbol tak ako pri formách F_{KX}, F_{XK}, avšak oproti celkovým formám F_{XX}, F_{KK} s jedným zásadným rozdielom. Zatiaľ čo v každom bode z množiny bodov tvoriacich celkové formy F_{KX}, F_{XK} dotyčnica k vrstevnici a dotyčnica ku spádovej krivke prechádza v Dupinovej indikatrix každá vždy iným sektorom, vymedzeným jej asymptotami, v tej podmnožine bodov foriem F_{XX}, F_{KK}, v ktorej je $D_2 < 0$, obe dotyčnice prechádzajú spoločne vždy iba jedným sektorom vymedzeným asymptotami Dupinovej indikatrix. *Koniec poznámky 7.*

Poznámka 8. Dupinova indikatrix so stredom v ľubovoľnom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ georeliéfu je v jeho skalárnej báze (x, y) so stredom v jemu odpovedajúcom bode $A_i\,(x_i, y_i, z_i)$ určená parametrickými rovnicami

$$x = \sqrt{(R_N)_m}\cos\alpha$$
$$y = \sqrt{(R_N)_m}\sin\alpha \qquad (32)$$

kde α je premenná veličina, ktorá sa mení v intervale (0°, 360°),

$$\sqrt{(R_N)_m} = \sqrt{\frac{K[D\cos^2\alpha + E\cos\alpha\sin\alpha + F\sin^2\alpha]}{A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha}} \qquad (32b)$$

je sprievodič, ktorého koncový bod opisuje krivku Dupinovu indikatrix, pričom

$A = z_{xx};\ B = z_{xy};\ C = z_{yy},$

$D = 1 + z_x^2;\ E = 2\,z_x\,z_y,\ F = 1 + z_y^2,$

$K = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}$

sú vo zvolenom bode $A_i\,(x_i, y_i, z_i)$ konštantami. Extrémne hodnoty polomeru krivosti $(R_N)_{E\,1,2}$ sú totožné s osami Dupinovej indikatrix a určené vzťahmi

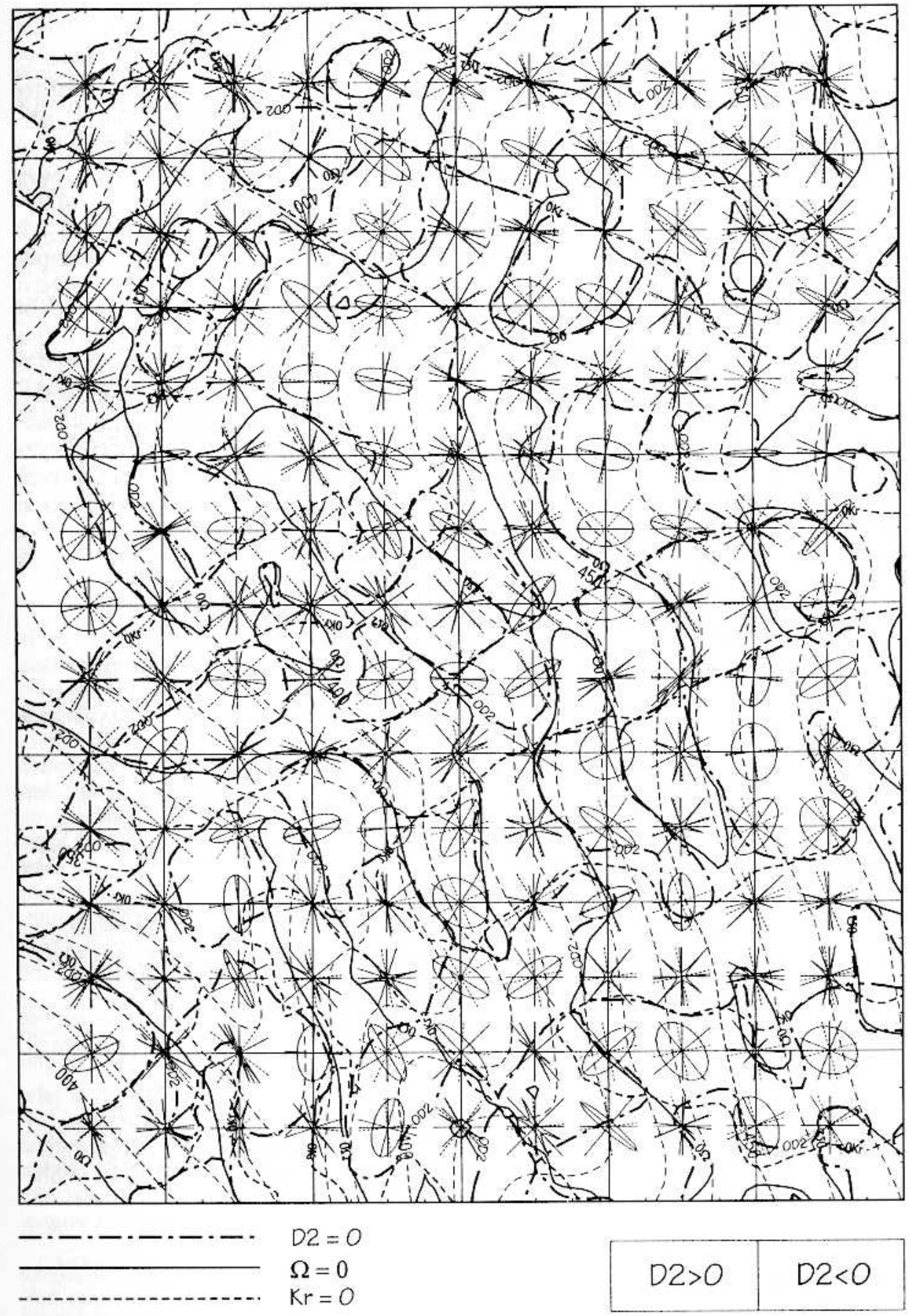
$$(R_N)_{E1,2} = \frac{K(DH^2 + EHG_{1,2} + FG_{1,2}^2)}{A + BHG_{1,2} + CG_{1,2}^2},$$
$$\sqrt{(R_N)_{E1,2}} = \sqrt{\frac{K(DH^2 + EHG_{1,2} + FG_{1,2}^2)}{A + BHG_{1,2} + CG_{1,2}^2}}, \qquad (33)$$

kde pre $G_{1,2}$, H platí, že

$$G_{1,2} = -(CD - AF) \pm \sqrt{(CD - AF)^2 - H(BD - AE)};\quad H = CE - BF.$$

Pre $D_2 < 0$ má Dupinova indikatrix tvar dvojného súboru hyperbol, pričom smernice asymptot $m_{as\,1,2}$, ako aj tangens uhla $\Delta\alpha$, ktorý asymptoty zvierajú, sú určené vzťahmi

$$m_{as1,2} = \frac{-z_{xy} \pm \sqrt{z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy}}}{z_{xy}}$$
$$\operatorname{tg}\Delta\alpha = \frac{2z_{xy}\sqrt{z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy}}}{z_{xy}^2 - z_x z_y}. \qquad (33b)$$



Obr. 7. Celkové formy georeliéfu a priestorové rozloženie hodnôt diskriminantu druhej Gaussovej diferenciálnej formy $D_2 > 0$ a $D_2 < 0$ vo vzťahu k rozloženiu Dupinovej indikatrix

Podrobne bol tento problém vyjadrený v prácach Krcha (1990, 1992, 1993 a 2001). *Koniec poznámky 8.*

Pre celkové geometrické konvex-konvexné formy a konkáv-konkávne formy $F_{XX}[(\omega > 0; (K_N)_t > 0) \wedge (\omega > 0; K_r > 0); (D_2 > 0)]$, $F_{KK}[(\omega < 0; (K_N)_t < 0) \wedge (\omega < 0; K_r < 0); (D_2 > 0)]$ má teda Dupinova indikatrix v zmysle poznámky 5 a poznámky 7 tvar elipsy a pre $F_{XX}[(\omega > 0; (K_N)_t > 0) \wedge (\omega > 0; K_r > 0); (D_2 < 0)]$, $F_{KK}[(\omega < 0; (K_N)_t < 0) \wedge (\omega < 0; K_r < 0); (D_2 < 0)]$ má tvar dvojného súboru hyperbol. Rozloženie Dupinovej indikatrix v jednotlivých základných celkových geometrických formách F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK} z detailu povodia Vápeničného potoka je v zmysle poznámok 5 a 7 vyjadrené na obr. 7.

ZÁVER

Formulácia množiny morfometrických veličín a vyjadrenie ich matematických vzťahov má pre modelovanie georeliéfu a procesov v prostredí informačných technológií geografických informačných systémov interdisciplinárny význam. Morfometrické veličiny vyjadrené vo vzťahoch (12) až (29) sú zároveň dôležitými veličinami na klasifikáciu geometrických foriem georeliéfu, ako aj na vyjadrenie vnútornej štruktúry týchto foriem.

LITERATÚRA

DIKAU, R. (1989). The application of a digital relief model to landform analysis in geomorphology. In Raper, J., ed. *Three dimensional applications in geographical information systems.* London (Taylor and Francis), pp. 51- 77.

DOORNKAMP, J. C., KING, C. A. (1971). *Numerical analysis in geomorphology.* New York (St. Martin's Press).

EVANS, I. S. (1972). General geomorphometry derivatives of altitude and descriptive statistics. In Chorley, R. J., ed. *Spatial analysis in geomorphology.* New York (Harper and Row), pp. 17- 90.

EVANS, I. S. (1979). *An integrated system of terrain analysis and slope mapping.* Final report on DA-ERO-591-73-G 0040, Department of Geography, University of Durham.

KRCHO, J. (1964). K problému zostrojenia máp gradientov spádu, máp izoklín, izalumklín a izalumchrón. *Geografický časopis,* 16, 61-75.

KRCHO, J. (1967). Zovšeobecnenie rovnice izalumklín na topografickej ploche a v jej skalárnom poli. *Geografický časopis,* 19, 107-129.

KRCHO, J. (1973). *Morphometric analysis of relief on the basis of geometric aspect of field theory.* Acta Geographica Universitatis Comenianae, Geographica Physica, 1. Bratislava (SPN).

KRCHO, J. (1979). Reliéf ako priestorový subsystém S_{RF} geografickej krajiny a jeho komplexný digitálny model. *Geografický časopis,* 31, 237-262.

KRCHO, J. (1983). Teoretická koncepcia a interdisciplinárne aplikácie komplexného digitálneho modelu pri modelovaní dvojdimenzionálnych polí. *Geografický časopis,* 35, 265-291.

KRCHO, J. (1986). Geometrické formy georeliéfu a ich hierarchické úrovne. *Geografický časopis,* 38, 210-235.

KRCHO, J. (1987). Matematické vlastnosti topografickej plochy georeliéfu z hľadiska morfometrickej analýzy a jej modelovanie pomocou komplexného digitálneho modelu. *Geografický časopis,* 39, 169-204.

KRCHO, J. (1990). *Morfometrická analýza a digitálne modely georeliéfu.* Bratislava (Veda).

KRCHO, J. (1993). Georelief and its cartographic modelling by complex digital model (CDM) from geographical information system (GIS) point of view. *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae, Geographica,* 33, 3-131.

KRCHO, J. (1999). Modelling of georelief using DTM – the influence of point configuration of input points field on positional and numeric accuracy. *Geografický časopis,* 51, 225-260.

KRCHO, J. (2001). *Modelling of georelief and its geometrical structure using DTM: positional and numerical accuracy.* Bratislava (Q111 Publishers).

KRCHO, J., BENOVÁ, A. (2002). Geometrická štruktúra georeliéfu a jej kartografické vyjadrenie vo vzťahu k elementárnym formám georeliéfu. *Kartografické listy,* 10, 19-35.

MINÁR, J. (1998). *Georeliéf a geoekologické mapovanie vo veľkých mierkach.* Habilitačná práca, Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského, Bratislava.

MINÁR, J. (1999). Morfometrická analýza polí a jej využitie v geoekológii. *Geografický časopis,* 51, 261-277.

MITÁŠ, L., MITÁŠOVÁ, H. (1998). Distributed soil erosion simulation for effective erosion prevention. *Water Resources Research,* 34, 505-516.

Jozef K r c h o, Alexandra B e n o v á

GEORELIEF AND ITS GEOMETRICAL STRUCTURE: GEORELIEF MODELLING WITH AND WITHOUT TIME PARAMETER

This is a profile type of study. It contains some contributions in the field of geometrical georelief form classification, parts of which are graphically expressed (basin of Vápeničný potok in the Little Carpathians). The study outlines the problem of exact mathematical and physical classification of total geometric georelief forms including the classification of geometric forms. Classification is based on the set of morphometric quantities GRF, derived by Krcho (1964, 1973, 1984, 1986, 1987 and 1990) by the instrumentarium of differential geometry. Georelief was considered from the point of view of the Earth's gravitation field so that the contour lines and gradient curvatures which form orthogonal network of curvatures, as well as the set of so derived G_{RF} morphometric quantities, also acquire mathematical and physical meaning.

Continuing the studies of Krcho (1973, 1986, 1990, 1992, 1993 and 2001) the paper outlines the following subjects:

– brief initial formulation of the dynamic georelief model and formulation of correct criteria for its replacement with the static georelief model at scale $1{:}M_i$ and its resolution level U_i without the time parameter T, as well as establishing conditions for the length of its time validity,

– expression of morphometric georelief quantities, which form the G_{RF} set, their inner classification, as well as the break down of the G_{RF} set into subsets of the ${}^{(i)}G_{RF}$ ($i = 1, 2, 3$), set considered from the point of view of the order of partial derivations contained in mathematical relationships of single morphometric quantities,

– expression of total geometric relief forms, their classification and analysis of their inner structure.

Georelief is initially formulated as a dynamic area and the dynamic georelief model is briefly outlined. The replacement of the dynamic georelief model with its static model at scale $1{:}M_i$ and its resolution level U_i, time interval ΔT_{Mi} of the validity of static model are expressed. In continuation to the above-quoted studies, geometric structure of georelief and its inner level is expressed. The characteristics of the set of morphometric georelief quantities are presented and broken down according to the individual basic subsets of the first, second, and third order.

Continuing to the above-quoted studies the total geometric relief forms and their classification, as well as the classification of total geometric forms with introduction of the discriminant of the second Gauss differential form D_2 as classification criterion are expressed.

Translated by H. Contrerasová